Fecha límite de entrega: 22 de noviembre

Ejercicios

1) En $(\mathbb{R}^+)^3$ se consideran los campos de vectores dados por $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ y $X_2 = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{x}\frac{\partial}{\partial z}$. Hallar una función con $h(1) = 1$ de manera que la distribución generada por X_1 e X_2 sea completamente integrable. Comprobar que en ese caso los conos $z = K\sqrt{x^2 + y^2}$ con $K \in \mathbb{R}^+$ son superficies integrales.

2) En $M = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ consideramos para cada $p = (a,b) \in M$ el difeomorfismo $f_p(x,y) = \big(ax - 2by, bx + (a+2b)y\big)$ y definimos el campo de vectores $X\big|_p = df_p\big(\frac{\partial}{\partial y}\big|_{p_0}\big)$ con $p_0 = (1,0)$.

a) Demostrar que $(M, \odot)$ tiene estructura de grupo abeliano con la operación $p \odot q = f_p(q)$ y que su elemento neutro es p_0.

b) Probar que el flujo local de X es $\Phi_t(p) = p \odot c_{p_0}(t)$ donde $c_{p_0}(t)$ es la curva integral de X con $c_{p_0}(0) = p_0$.

c) Hallar una fórmula explícita para c_{p_0} y para Φ_t.

3) Sea $\omega = a\, dx + b\, dy + c\, dz$ una 1-forma en $\mathbb{R}^3$ (con la carta identidad) tal que a, b y c son funciones que no se anulan simultáneamente. Probar que

$$a\Big(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\Big) + b\Big(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\Big) + c\Big(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\Big) = 0$$

es una condición necesaria y suficiente para que la distribución $\Delta = \{X \;:\; \omega(X) = 0\}$ sea completamente integrable. Intentar reescribir esta condición sólo en términos de ω y $d\omega$, sin referencia a las coordenadas usadas.

4) En mecánica clásica, el movimiento unidimensional de una partícula de masa m en un campo de fuerzas de potencial V está determinado por un punto (p,q) en el plano de fases $\mathbb{R}^2$ con p el momento y q la posición. La ley de Newton ($F = ma$) asegura que la trayectoria de una partícula corresponde a una curva integral de $X = -V'(q)\frac{\partial}{\partial p} + \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}$ en el plano de fases. Hallar explícitamente el flujo local Φ_t en el caso $m = 1$ con $V(q) = 2q^2$ (correspondiente al movimiento armónico simple) y comprobar que para cualquier región acotada R, la integral $\int_{\Phi_t(R)} dp \wedge dq$ no depende del tiempo.

Notas e indicaciones

1) La condición de ser completamente integrales no varía al multiplicar vectores por funciones no nulas, pues la distribución generada es la misma.

Estos conos son todas las superficies integrales (maximales), aunque esto no se pide en el ejercicio.

2) La prueba de la propiedad asociativa es larga sin emplear trucos ingeniosos. Se consigue cierta reducción en los cálculos directos notando que el resultado de $(p \odot q) \odot r$ es simétrico en p y r. De esta forma, $(p \odot q) \odot r = (r \odot q) \odot p$ y la asociativa se deduce de la conmutativa.

Éste es ejemplo de grupo de Lie, un grupo con estructura de variedad, y de un campo de vectores invariante, es decir, obtenido a partir de un vector en el elemento identidad al que se le aplican todas las transformaciones del grupo. La teoría que se atisba en este problema implica que todos los campos de vectores de este tipo son completos.

3) La segunda parte es un caso particular de la formulación del teorema de Frobenius en términos de formas diferenciales, que no hemos visto en el curso. Puede ayudar buscar en la literatura esta formulación (curiosamente más próxima a la original de Frobenius). Nótese que es bastante sorprendente que esta condición con derivadas paraciales sea invariante por cambios de carta.

4) La notación p y q es común en mecánica. Si causa alguna confusión escríbase x e y en su lugar, que son los nombres matemáticos habituales para las coordenadas de $\mathbb{R}^2$.

La invariancia de la integral indica que el flujo Hamiltoniano preserva el área y es un hecho general para sistemas cerrados, incluso con muchas partículas, llamado teorema de Liouville. Físicamente refleja de alguna forma la homogenidad del tiempo. Si a lo largo del tiempo Φ_t cambiase el área de R, tendríamos una manera de distinguir si ha pasado mucho o poco tiempo desde el instante inicial.