Fecha límite de entrega: 3 de noviembre

Ejercicios

1) Sea $O(2)$ el conjunto de matrices ortogonales 2×2 (las que corresponden a movimientos en $\mathbb{R}^2$). Este conjunto viene determinado por ciertas ecuaciones en los cuatro elementos de las matrices y por tanto puede considerarse como una subvariedad de $\mathbb{R}^4$. ¿Qué dimensión tiene? Encontrar una variedad sencilla a la que sea difeomorfa.

2) Consideremos el hemisferio superior de la esfera unidad $H = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2=1,\; z>0\big\}$ con la carta que da la proyección en las dos primeras coordenadas $(x,y,z)\mapsto(x,y)$. Sea $f: H\longrightarrow H$ la función que asigna a cada punto p el punto medio del arco de meridiano que une p con el polo norte. Hallar las coordenadas de $Y\big|_{f(p)} = df\big(X\big|_p\big)$ en la base $\big\{\frac{\partial}{\partial x}\big|_{f(p)}, \frac{\partial}{\partial y}\big|_{f(p)}\big\}$ donde df es la aplicación tangente y $X\big|_p = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\big|_p + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\big|_p$.

3) Se dice que un tensor (campo tensorial) de tipo $(0,2)$ es *simétrico* si $T_{ij}=T_{ji}$ donde T_{ij} son sus componentes. Demostrar que este concepto de simetría está bien definido, es decir, que no depende de la carta empleada para calcular las componentes. Comprobar que sin embargo no se puede extender a tensores de tipo $(1,1)$, concretamente, construir un ejemplo para el que $T^i_j = T^j_i$ se cumpla usando una carta pero no otra.

4) Clásicamente el campo electromagnético se representa por dos campos vectoriales, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, en $\mathbb{R}^3$ que en ausencia de cargas y corrientes están gobernados por las *ecuaciones de Maxwell*

$$\operatorname{div}\vec{E}=0,\qquad \operatorname{div}\vec{B}=0,\qquad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial B}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\vec{B}=\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Consideramos $\mathbb{R}^4$ con la carta identidad $\big(\mathbb{R}^4,\phi=(x^1,x^2,x^3,x^4)\big)$. Sea $*$ el endomorfismo lineal en $\operatorname{Alt}^2\big(T_p(\mathbb{R}^4)\big)$ tal que $*(dx^i\wedge dx^j)\wedge dx^i\wedge dx^j = \pm dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^4$ para $i\neq j$ donde se escoge el signo $-$ si y sólo si $i=1$ o $j=1$. Por ejemplo, $*(dx^3\wedge dx^4)=dx^1\wedge dx^2$ y $*(dx^1\wedge dx^3)=dx^2\wedge dx^4$.

Comprobar que definiendo el *tensor de Faraday* $F=F_{ij}dx^i\wedge dx^j$ con $(F_{21},F_{31},F_{41})=\vec{E}$, $(F_{34},F_{42},F_{23})=\vec{B}$ y el resto de los F_{ij} nulos, las ecuaciones de Maxwell equivalen a:

$$dF = d*F = 0 \qquad \text{con la notación } (t,x,y,z)=(x^1,x^2,x^3,x^4).$$

Notas e indicaciones

1) De cursos anteriores debes saber que ecuaciones adecuadas en $\mathbb{R}^n$ definen un subconjunto con una estructura natural de subvariedad. El resultado más conocido en este sentido es que $F(\mathbf{x}) = 0$ define una subvariedad $n-1$ dimensional de $\mathbb{R}^n$ si $\nabla F \neq \vec{0}$ en todos sus puntos. El resultado se extiende con modificaciones a submersiones. Si los conocimientos previos no permiten dar una solución teórica de este problema, se valorará una explicación con palabras.

2) Si uno quiere proceder a partir de la definición, quizá sea conveniente cambiar a la carta en esféricas, con la que f tiene una expresión sencilla, y reescribir el resultado en cartesianas. También es posible anticipar la solución geométricamente.

3) En cada punto fijado, un tensor de tipo $(1,1)$ corresponde a un endomorfismo lineal. Un buen complemento al problema es pensar qué matrices simétricas lo son en cualquier base.

4) A. Einstein fue el primero en sugerir que el campo electromagnético debería representarse por un tensor en lugar de por los dos vectores clásicos. El operador $*$ es un caso especial del *operador estrella de Hodge*. Aunque aquí no sea claro, admite una definición libre de coordenadas una vez especificado un producto escalar y nuestro caso es el que corresponde al producto escalar de la relatividad especial.