Duración: dos horas | 3 de febrero de 2012

Ejercicios

1) Sean $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $N = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y $f : M \longrightarrow N$ dada por $f(x,y) = (x+y, x-y)$. Consideremos $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy \in \Omega^1(N)$. Hallar $\eta \in \Omega^1(M)$ tal que $\eta(\vec{v}) = \omega\big(df(\vec{v})\big)$ para cualquier vector $\vec{v}$ del espacio tangente de M.

2) Sea Δ la distribución en $M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ generada por $X_1 = (y\cos z + z \operatorname{sen} z)\frac{\partial}{\partial x} + (z - x\cos z)\frac{\partial}{\partial y} + (-y - x\operatorname{sen} z)\frac{\partial}{\partial z}$ y $X_2 = (y \operatorname{sen} z - z\cos z)\frac{\partial}{\partial x} + (z - x\operatorname{sen} z)\frac{\partial}{\partial y} + (-y + x\cos z)\frac{\partial}{\partial z}$. Decidir si la esfera unidad $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es una subvariedad integral para Δ.

3) Hallar las ecuaciones diferenciales de las geodésicas para el paraboloide $z = x^2 + y^2$ entendido como subvariedad de $\mathbb{R}^3$ con la métrica inducida.

4) Recuérdese que el tensor de Riemann tiene las simetrías $R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl} = R_{klij}$, donde $R_{ijkl} = g_{in}R^n_{jkl}$. Probar que el tensor de Ricci $R_{ij} = R^k_{ikj}$ de cualquier métrica en $\mathbb{R}^2$ de la forma $A(x,y)dx^2 + B(x,y)dy^2$ cumple $R_{12} = R_{21} = 0$.