Entrega: Hasta el 22 de mayo

---

1) Da una prueba analítica de que la función $F(\xi,\eta) = \iint_D e(-\xi x - \eta y)\,dxdy$ con D el disco unidad, es radial; esto es, sólo depende de $\xi^2+\eta^2$. En clase sólo dimos un argumento geométrico: $e(-\xi x - \eta y)$ son ondas en D en la dirección (ξ,η) y como D es invariante por giros, la integral también lo debe ser.

2) Demuestra que existe algún número $\delta < 1$ tal que

$$\lim_{N\to\infty} N^{-\delta}\sum_{n=1}^{N} e\big(n^{2012.2013}\big) = 0.$$

Nota: Si lo sabes hacer cuando la suma se restringe a $N/2 < n \le N$, lo deberías saber hacer para toda la suma.

3) En los apuntes se afirma que se puede deducir del Teorema 2.3.9 que el número de puntos de coordenadas enteras en un círculo centrado de radio R es $\pi R^2 + O\big(R^{2/3}\big)$. Explica con detalle cómo hacerlo. *Nota*: Antes de (2.31) hay unas mínimas indicaciones.

4) [Mayor dificultad] Prueba las identidades

$$(s-1)\zeta(s)\int_1^\infty x^{-s}\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}\,dx = 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} \qquad \text{para} \qquad \Re(s) > 1,$$

donde $\mu(n)$ es la función de Möbius y $d(n)$ es el número de divisores.
Indicación: En cierto punto quizá necesites análogos de la fórmula producto de Euler, (1.33) en los apuntes, para $\sum \mu(n)n^{-s}$ y $\sum d^2(n)n^{-s}$.

Sobre la calificación: Si H es el promedio obtenido en las hojas, V el obtenido en los problemas voluntarios y E la del examen (si se hiciera), la calificación final viene dada por la fórmula

$$\boxed{2+0.4\cdot\mathsf{H}+0.4\cdot\max(\mathsf{V},\,\mathsf{E})}$$

De esta forma el examen no es obligatorio. Tendrá lugar el último día de clase, el 22 de mayo, y constará de cuatro problemas. Este examen se puede usar también para "subir nota", es decir, si es favorable para el alumno se tomará E en lugar de la fórmula anterior.