Entrega: Hasta el 24 de abril

---

1) Explica con detalle por qué tomando $f(x) = g(x-a)e(bx)$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - b)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

2) Sea $A = (a_{nm})_{n,m=0}^{N-1}$ la matriz de la DFT normalizada, es decir, $a_{nm} = N^{-1/2} e(nm/N)$. Prueba que para N impar, el polinomio característico de A^2, el determinante $\det(A^2 - \lambda I)$, es igual a $(1-\lambda)(\lambda^2 - 1)^{(N-1)/2}$.

3) Sea $\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t) \in C^\infty$ con decimiento rápido en cada coordenada de $\mathbf{x}$ que resuelve la ecuación de Schrödinger $i\Psi_t = -\frac{h}{4\pi m} \Delta \Psi$ con Δ el operador laplaciano. Prueba que $\|\Psi(\cdot, t)\|_2$ es constante en t. *Indicación*: Deduce que $\frac{d}{dt} \|\Psi(\cdot, t)\|_2^2 = -\frac{h}{2\pi m} \operatorname{Im} \int \overline{\Psi} \Delta \Psi d\mathbf{x}$ y luego integra por partes en cada variable.

4) Cuando la luz se difracta por una pequeña rendija cuadrada de lado δ el modelo predice que, con unidades adecuadas, la intensidad proyectada en el punto (x, y) de una pantalla viene dada por $\delta^4 f^2(\delta x) f^2(\delta y)$ con $f(x) = x^{-1} \operatorname{sen} x$. Explica por qué en los experimentos se ve un esquema que tiene forma de cruz, con una especie de cuadrado en el centro y rectángulos en horizontal y vertical[1].

Problema voluntario: Se trata de examinar la prueba del principio de fase estacionaria para cubrir un caso que no se deduce directamente del enunciado visto en clase.

Sea $A \in C_0^\infty$, $F \in C^\infty$ con F' estrictamente creciente y $A(0) = A'(0) = F(0) = 0$, $A''(0) = F''(0) = 2$. Calcula el valor del límite

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \cos\big(2\pi \lambda F(x)\big) \, dx.$$

[1] `http://www.marcuswinter.de/media/other/diffraction-fourier-square-1000.png`