Entrega: Hasta el 6 de marzo

---

1) Sea F la función parte fraccionaria. Calcula la serie de Fourier de $G = F * F$. ¿Converge en todo punto a G?

2) Halla una fórmula asintótica con término de error para $S_N = \sum_{n=1}^{N} n^{-1} \log n$.

3) Prueba

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi x)} \qquad \text{para } x \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

Indicación: Una manera de proceder es notar que $(e(z) - 1)^{-1}$ tiene polos en los enteros.

4) Calcula la transformada de Fourier discreta de la señal $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(n) = n$, $0 \le n < 4$ y comprueba que se verifica la identidad de Parseval.

5) Si en una imagen en formato JPEG hacemos cero todos los coeficientes de Fourier excepto los a_{00} que corresponden al armónico constante ϕ_{00}, ¿qué ocurrirá?

Problema voluntario: Algunas propiedades adicionales de Γ y ζ.

a) Utilizando la teoría de funciones de orden finito explica por qué deben existir $A, B \in \mathbb{C}$ tales que $\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2)/\Gamma(2z) = Ae^{Bz}$.

b) Ajusta A y B para deducir la *fórmula de duplicación* $\Gamma(z)\Gamma\big(z + \frac{1}{2}\big) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$. *Indicación*: Es conveniente que pruebes $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

c) Deduce también la forma asimétrica $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\pi s/2)\zeta(s)$ de la ecuación funcional.

d) Ramanujan envió a un matemático la fórmula $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -1/12$, antes de ser descubierto por Hardy. Explica su significado a la luz de la función ζ.