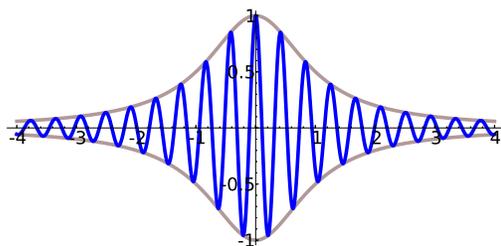


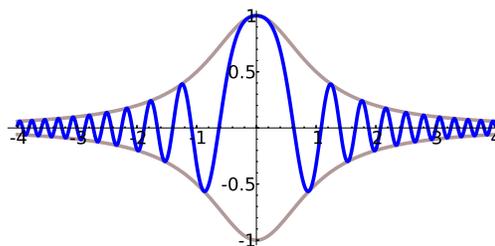
2.2. Integrales oscilatorias

Las integrales oscilatorias aparecen de manera natural en el análisis armónico abstracto pero también en numerosas aplicaciones. Muchas funciones especiales que provienen de problemas físicos concretos se definen como integrales oscilatorias.

La transformada de Fourier es uno de los ejemplos más básicos de integral oscilatoria. Si una función se anula en el infinito y sus derivadas decaen lo suficiente, entonces su transformada de Fourier tiende rápidamente a cero. A pesar de que esto es muy sencillo de probar integrando por partes, parece milagroso geoméricamente (mirando a la gráfica) que las partes positivas y negativas de senos y cosenos se cancelen con tanta precisión. ¿Qué ocurre con las integrales oscilatorias que no son transformadas de Fourier? La idea es que siempre que la fase se aproxime por una función lineal no constante, todo debería funcionar como con la transformada de Fourier.



$$f(x) = (x^2 + 1)^{-1} \cos(15x)$$



$$f(x) = (x^2 + 1)^{-1} \cos(4x^2)$$

Por otro lado, si en algún punto la fase es estacionaria (tiene derivada cero) la falta de oscilación a ritmo constante restringe la cancelación y permite extraer un término principal.

2.2.1. El principio de fase estacionaria

Vamos a considerar integrales oscilatorias de amplitud A y fase λF con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, del tipo

$$(2.15) \quad I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e(i\lambda F(x)) dx.$$

El propósito del parámetro λ es graduar la oscilación y ver la influencia en el resultado. En términos generales, una integral oscilatoria es menor cuanto mayor es la oscilación.

Consideremos primero el caso $F(x) = -x$ y $A(x) = f(x)$ que es la transformada de Fourier \hat{f} . Si $f \in C^n$ y $f^{(k)} \in L^1$ para $0 \leq k \leq n$ (la derivada 0 es la propia función), entonces integrando por partes se tiene:

$$(2.16) \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi|\xi|)^n} \|f^{(n)}\|_1 \quad \text{para } |\xi| \neq 0.$$

Es decir, con regularidad suficiente, se cumple $\widehat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-n})$.

Esta sencilla idea es menos específica de lo que pudiera parecer y da lugar a un resultado general siempre que la fase no sea estacionaria y las integrales tengan sentido.

Proposición 2.2.1. *Consideremos (2.15) con $A \in C^n$ y $A^{(k)} \in L^1$ para $0 \leq k \leq n$. Si $G = 1/F' \in C^n$ y $G^{(k)}$ está acotada en el soporte de A para $0 \leq k \leq n$, entonces*

$$I(\lambda) = O(|\lambda|^{-n}) \quad \text{cuando} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Demostración. Integrando por partes

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(x)G(x))F'(x)e(\lambda F(x)) dx \ll \lambda^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (A(x)G(x))'e(\lambda F(x)) dx.$$

Si $n = 1$ se obtiene el resultado porque $A, A' \in L^1$ y G y G' están acotadas. En cualquier caso, bajo nuestras hipótesis, $(AG)' \in C^n$ y $(AG)^{(k)} \in L^1$ para $0 \leq k \leq n - 1$ y el resultado se sigue por inducción. \square

Nada similar ocurre si F' se anula en un punto del soporte de la amplitud. Por ejemplo, por extensión analítica, (1.14) debe ser también válida para $\Re(a) > 0$ donde, como en la Proposición 1.2.5, la rama de la raíz es la que aplica \mathbb{R}^+ en \mathbb{R}^+ . Para $a = 1 + 2\pi i\lambda$ se deduce de la evaluación de $\widehat{f}(0)$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e(\lambda x^2) dx \right| = \sqrt{\pi} (1 + 4\pi^2 \lambda^2)^{-1/4} \sim (2|\lambda|)^{-1/2}.$$

Para estudiar los casos en que la fase llega a ser estacionaria, vamos a hacer una reducción previa. Si existe un número finito de puntos x_1, x_2, \dots, x_s en el soporte de A tales que $F'(x_j) = 0$, siempre podemos escoger funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s \in C_0^\infty$ con soportes en intervalos disjuntos tales que φ_j coincide con A en un entorno de x_j . Entonces

$$(2.17) \quad I(\lambda) = \sum_{j=1}^s \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x) e(\lambda F(x)) dx + \int_{-\infty}^{\infty} B(x) e(\lambda F(x)) dx$$

donde $B = A - \sum \varphi_j$. Como F no tiene puntos críticos en el soporte de B , es posible aplicar la Proposición 2.2.1 bajo las condiciones especificadas de regularidad. Por otro lado, en cada una de las integrales hay exactamente un punto crítico de F dentro del soporte de φ_j . Con ello y una traslación vemos que no hay pérdida de generalidad si nos restringimos al caso en que la amplitud cumple $A \in C_0^\infty$ y $x = 0$ es el único punto del soporte de A en el que F' se anula.

Teorema 2.2.2 (Principio de fase estacionaria). *Sea $A \in C_0^\infty$ y $F \in C^\infty$ con un punto crítico en $x = 0$ dentro del soporte de A y $F''(0) > 0$. Entonces para cada entero positivo n se cumple*

$$I(\lambda) = \frac{e(\lambda F(0) + 1/8)}{\sqrt{\lambda F''(0)}} \left(A(0) + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \cdots + O(\lambda^{-n}) \right) \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow +\infty$$

donde los a_i dependen de los coeficientes de Taylor de A y F en $x = 0$.

La elección de los signos de λ y $F''(0)$ no impone ninguna restricción porque conjugando todos los casos, bajo $F''(0) \neq 0$, se reducen al indicado.

Los coeficientes a_j no tienen una fórmula general sencilla, aunque siguiendo la prueba se pueden determinar individualmente. Un caso bastante explícito del que deduciremos el resultado general, es el caso cuadrático.

Teorema 2.2.3. *Si $A \in C_0^\infty$ y $F(x) = x^2$, para cada entero positivo n se cumple*

$$I(\lambda) = \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{A^{(2j)}(0)}{j!(-8\pi i\lambda)^j} + O(\lambda^{-n}) \right) \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Demostración. Por convergencia uniforme, se tiene

$$I(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_\epsilon(\lambda) \quad \text{con} \quad I_\epsilon(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{-(\epsilon - 2i\lambda)\pi x^2} dx.$$

Usando la identidad de Parseval (por extensión analítica de (1.14) como antes)

$$I_\epsilon(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon - 2i\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{A}(\xi) e^{-\pi\xi^2/(\epsilon - 2i\lambda)} d\xi.$$

Gracias al decaimiento rápido de \widehat{A} , no hay problema al calcular el límite, y desarrollando por Taylor hasta grado $2(n-1)$ el segundo factor del integrando,

$$I(\lambda) = \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{A}(\xi) e^{-\pi i \xi^2 / 2\lambda} d\xi = \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{-\pi i}{2\lambda} \right)^j \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{A}(\xi) \xi^{2j} d\xi + O(\lambda^{-n}) \right).$$

La prueba se concluye apelando a (1.13) y a la fórmula de inversión. \square

Demostración del Teorema 2.2.2. Cambiando $F(x)$ por $F(x) - F(0)$, nos podemos restringir al caso $F(0) = 0$. Considerando el desarrollo de Taylor de $F(x)/x^2$, es fácil ver que $G(x) = \sqrt{2F(x)/x^2 F''(0)}$ define una función C^∞ en un entorno del origen con $G(0) = 1$. Entonces, por el teorema de la función inversa, $y(x) = xG(x)$ tiene una inversa $x = x(y)$ definida como una función C^∞ en un entorno del origen con $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$.

Procediendo como en (2.17) no se restringe generalidad suponiendo que el soporte de A está dentro de dicho entorno del origen. El cambio $x \mapsto x(y)$ lleva a

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x(y)) e(\lambda F''(0)y^2/2) dy$$

porque $F(x) = y^2(x)F''(0)/2$. Aplicando el Teorema 2.2.3 con $\lambda F''(0)/2$ en lugar de λ , se obtiene el resultado. Nótese que por la regla de derivación de la inversa, las derivadas sucesivas de $A(x(y))$ en $y = 0$ son funciones racionales de las derivadas de A y F en cero. \square

El Teorema 2.2.2 da un desarrollo asintótico de (2.15) como un polinomio en $\lambda^{-1/2}$ si $F'(0) = 0$ y $F''(0) \neq 0$. Cabe preguntarse qué ocurriría si también la derivada segunda se anulase. Una prueba en las mismas líneas demuestra que, en general, si $F^{(k)}(0) = 0$ para $0 < k \leq K$ entonces el resultado será un polinomio en $\lambda^{-1/K}$.

Aunque la condición de que en (2.15) la amplitud sea regular y de L^1 parezca natural, en muchas ocasiones no es así. Por ejemplo, en la evaluación de las sumas de Gauss usando sumación de Poisson o en la ecuación de Schrödinger aparecen transformadas de Fourier de “gaussianas” con exponente imaginario puro. Cabe preguntarse si tiene significado como integral impropia de Riemann, es decir, si existe

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \int_{-M}^N e(\lambda x^2 - \xi x) dx \quad \text{para cualquier } \lambda, \xi \in \mathbb{R} \text{ con } \lambda \neq 0,$$

y en caso afirmativo si es lícito aplicar la fórmula de inversión (1.7).

Otra cuestión relacionada es qué ocurre cuando trabajamos en un intervalo en lugar de en todo \mathbb{R} . Esto equivale a multiplicar en (2.15) la amplitud por una función característica y la falta de regularidad impide utilizar los resultados anteriores.

Una acotación sencilla bien conocida que es útil tanto en análisis armónico como en teoría analítica de números se recoge en la siguiente proposición. Nótese la asimetría del caso $k = 1$. Las amplitudes se han eliminado porque típicamente en un intervalo se pueden extraer por el segundo teorema del valor medio para integrales (en [Spi84] es el tercero) o integrando por partes. Véase [Mon94] para una versión del caso $k = 1$ con amplitudes.

Proposición 2.2.4 (Lemas de van der Corput). *Dado un entero $k \geq 2$ existe una constante c_k tal que si $F \in C^k([a, b])$ y $F^{(k)}(x) \geq \lambda_k > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces*

$$\left| \int_a^b e(F(x)) dx \right| \leq c_k \lambda_k^{-1/k}.$$

El resultado también se aplica al caso $k = 1$ bajo la hipótesis adicional de que F' sea monótona.

Demostración. En el caso $k = 1$ se procede simplemente escribiendo

$$\int_a^b e(F(x)) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{F'(x)} 2\pi i F'(x) e(F(x)) dx,$$

e integrando por partes para obtener

$$\left| \int_a^b e(F(x)) dx \right| \leq \frac{1}{2\pi F'(b)} + \frac{1}{2\pi F'(a)} + \frac{1}{2\pi} \left| \int_a^b \left(\frac{1}{F'(x)} \right)' dx \right| \leq \frac{1}{\pi \lambda_1}.$$

El resto de los casos se prueban por inducción. Para $k \geq 2$, la condición $F^{(k)}(x) > \lambda_k > 0$ asegura que $F^{(k-1)}$ es monótona creciente. Por el teorema del valor medio, dado $\delta > 0$, la desigualdad $|F^{(k-1)}(x)| \leq \delta$ se verifica para x incluido en un intervalo I de longitud a lo más $2\delta\lambda_k^{-1}$. En los a lo más dos intervalos que componen $[a, b] - I$ se tiene $F^{(k-1)}(x) > \delta$ o $-F^{(k-1)}(x) > \delta$. Por consiguiente la hipótesis de inducción, quizá conjugando, asegura

$$\left| \int_a^b e(F(x)) dx \right| \leq 2\delta\lambda_k^{-1} + 2c_{k-1}\delta^{-1/(k-1)}.$$

Eligiendo $\delta = \lambda_k^{(k-1)/k}$ se obtiene el resultado esperado. \square

Por ejemplo, de la Proposición 2.2.4 se tiene que siempre que $N_1 > \xi$,

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} e(x^2 - \xi x) dx \right| \leq c_1 N_1^{-1}$$

para $0 < N_1 < N_2$ y de aquí no es difícil deducir que la transformada de Fourier de las gaussianas con exponente imaginario puro tiene sentido como integral impropia de Riemann.

Damos a continuación una forma ligeramente más explícita de la misma idea en un intervalo fijado.

Proposición 2.2.5. *Sea $\lambda > 0$ y $a < 0 < b$ entonces*

$$\int_a^b e(\lambda x^2) dx - \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} \ll \text{mín}((|a|\lambda)^{-1}, \lambda^{-1/2}) + \text{mín}((b\lambda)^{-1}, \lambda^{-1/2})$$

donde la constante \ll es absoluta, es decir, no depende de ninguno de los parámetros.

Demostración. Descomponemos la integral en tres partes:

$$\int_a^b e(\lambda x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e(\lambda x^2) dx - \int_b^{\infty} e(\lambda x^2) dx - \int_{-\infty}^a e(\lambda x^2) dx.$$

La primera, que acabamos de ver que tiene sentido, se puede evaluar confiando en (1.14) o más claramente usando el teorema de los residuos para mover la línea de integración y transformar el integrando en $e^{-2\pi\lambda x^2}$. En cualquier caso, el resultado es $(1+i)/2\sqrt{\lambda}$.

Cada una de las dos últimas integrales son $O(\lambda^{-1/2})$ por la Proposición 2.2.4 con $k = 2$. Por otro lado, este mismo resultado con $k = 1$ asegura que la primera es $O((|a|\lambda)^{-1})$ y la segunda $O((b\lambda)^{-1})$. \square

Completando cuadrados, no es difícil deducir con este resultado que la fórmula de inversión $f(x) = \int \widehat{f}(\xi)e(x\xi) d\xi$ es válida, en el sentido de integrales impropias de Riemann, para $f(x) = e(\lambda x^2)$ a pesar de que esta función no está en L^1 .

Para ilustrar las ideas anteriores vamos a estudiar la asintótica de una de las *funciones de Bessel*, las cuales son transformadas de Fourier de funciones singulares. Originariamente fueron introducidas en relación con el movimiento de los planetas pero aparecen como armónicos en muchos problemas con simetría radial. Por ejemplo, así como al estudiar una cuerda vibrante los armónicos naturales son los de Fourier, para una membrana circular, como la de un tambor, son funciones de Bessel.

Aquí nos ocuparemos de J_1 , definida como

$$(2.18) \quad J_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{sen}(\lambda x) dx.$$

Nuestro objetivo es hallar la asintótica de $J_1(2\pi\lambda)$ cuando $\lambda \rightarrow +\infty$. Tras el cambio de variable $x \mapsto \cos(\pi x)$ se tiene

$$(2.19) \quad J_1(2\pi\lambda) = \int_0^1 \cos(\pi x) \operatorname{sen}(2\pi\lambda \cos(\pi x)) dx.$$

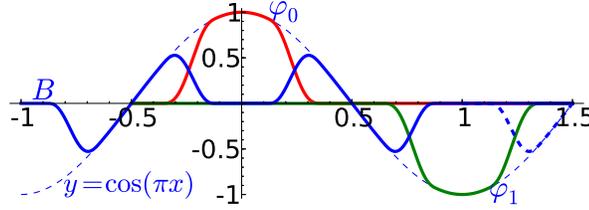
Esta expresión resulta más manejable que (2.18) y la tomaremos como punto de partida. Por la periodicidad,

$$J_1(2\pi\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos(\pi x) \operatorname{sen}(2\pi\lambda \cos(\pi x)) dx = \frac{1}{2} \Im \int_{-1/2}^{3/2} \cos(\pi x) e(\lambda \cos(\pi x)) dx.$$

Con la notación de (2.15), $F(x) = \cos(\pi x)$ y la fase tiene puntos estacionarios en $x = 0$ y en $x = 1$. Primero los aislamos como en (2.17). Con esta fin introducimos $\varphi_0 \in C_0^\infty$ tal que $\varphi_0|_{[-0.1, 0.1]} = \cos(\pi x)$, con soporte incluido en $[-0.5, 0.5]$ y $\varphi_1(x) = -\varphi_0(1-x)$ (que coincide con $\cos(\pi x)$ cerca de $x = 1$). La diferencia $b(x) = \cos(\pi x) - \varphi_0(x) - \varphi_1(x)$ se transforma en una función C_0^∞ “moviendo” la parte con $x \in [1, 1.5]$ a $[-1, -0.5]$. Es decir, considerando

$$B(x) = \begin{cases} b(x) & \text{si } x \in [-1/2, 1] \\ b(x+2) & \text{si } x \in [-1, -1/2] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

En un dibujo,



De esta forma, por la Proposición 2.2.1, para cualquier $N > 0$

$$J_1(2\pi\lambda) = \frac{1}{2} \Im \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \psi(x)) e(\lambda F(x)) dx + O(\lambda^{-N}).$$

Por otro lado el Teorema 2.2.2 prueba (conjugando para ajustar el signo de F'')

$$\int \varphi_0(x) e(\lambda F(x)) dx = \frac{e(\lambda - 1/8)}{\pi\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-3/2}).$$

Por la simetría o repitiendo el cálculo, $\int \varphi_1(x) e(\lambda F(x)) dx$ da el mismo resultado y se concluye

$$(2.20) \quad J_1(2\pi\lambda) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen} \left(2\pi\lambda - \frac{\pi}{4} \right) + O(\lambda^{-3/2}).$$

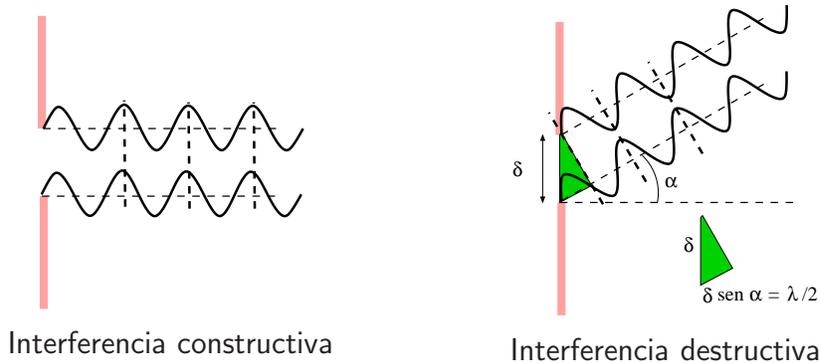
Ya para $\lambda = 1$ el error relativo al aproximar por el término principal es menor que el 6 %, mientras que para 2013 es menor que $4 \cdot 10^{-5}$.

2.2.2. Las matemáticas de la difracción

La *difracción* es un fenómeno puramente ondulatorio por el cual las ondas tienden a bordear los obstáculos. Esto es bastante creíble en el agua y mucho menos en la luz. En nuestra experiencia habitual, la luz viaja en línea recta en forma de rayos sin embargo experimentos precisos (en el límite de lo que podríamos hacer en casa, a pesar de que hay referencias bastante antiguas a la difracción [BW65, §8.1]) muestran que cuando un rayo de luz pasa por un orificio muy pequeño, al situar una pantalla frente a él a cierta distancia, se pueden ver unos curiosos anillos de luz y oscuridad. Por culpa de este fenómeno, es imposible conseguir sombras perfectamente delineadas y hay un límite en ciertos instrumentos ópticos. Por ejemplo, una *cámara oscura* (y por extensión una cámara fotográfica) es en principio mejor (más nítida) cuanto menor sea su apertura pero a partir de cierto límite produce imágenes borrosas.

Aunque matemáticamente el modelo sea complejo, no es difícil hacerse una idea intuitiva. Según el *principio de Huygens*, propuesto por el físico C. Huygens en el siglo XVII, una onda se comporta como si en cada punto generase nuevas ondas esféricas, llamadas

ondas secundarias, que se mueven “hacia adelante” y al combinarse dan lugar a la nueva forma de la onda en el instante siguiente. Supongamos que la luz, o cualquier otra onda, pasa por una rendija de tamaño comparable a su longitud de onda. Para ciertos ángulos con la normal a la rendija, la superposición de las ondas secundarias que parten de cada punto de la rendija es destructiva y para otros no. Esto se materializa en que al pasar la luz por una rendija de este tipo se obtienen los anillos de luz y oscuridad antes mencionados. Si la rendija es muy grande en comparación con la longitud de onda (que es lo que ocurre en nuestra experiencia cotidiana), las ondas secundarias tienen todos los posibles desfases y es de prever que la superposición de todas ellas tenga gran cancelación excepto cuando el ángulo es muy pequeño. En otras palabras, una integral como (2.15) debería ser siempre pequeña una vez que evitemos el caso en que λ es casi cero. Por eso nos parece que la luz viaja en línea recta. En otro contexto (el de la electrodinámica cuántica), esta idea está magníficamente explicada en [Fey85]. Una manera teórica de entender por qué la óptica geométrica (la luz considerada como rayos en lugar de ondas) es correcta en primera aproximación, que no exploraremos aquí, es que para longitudes de onda muy pequeñas, la ecuación de ondas, se aproxima por otra ecuación en derivadas parciales, la *ecuación eikonal* que admite soluciones que sí determinan rayos [Tay96, §6.6] [BW65, §3].



Esta explicación, aunque cualitativamente satisfactoria, es deficiente porque el principio de Huygens no es cierto sin modificaciones [BW65, §8.2], de hecho sólo da una primera aproximación correcta para ángulos pequeños. Además lo que buscamos es una justificación de la difracción matemática y físicamente más básica, que no apele a principios injustificados de este tipo.

A pesar de que la difracción ocurre con todo tipo de ondas (y partículas, según la interpretación mecánico cuántica), aquí tendremos en mente el caso de la luz visible para hacer aproximaciones. Por ello, es conveniente conocer algunos datos. En primer lugar, la velocidad (de fase) de la luz y de toda radiación electromagnética es

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

según se deduce de las ecuaciones de Maxwell (en realidad en los años 80 del siglo XX se redefinió el metro para que este valor fuera exacto e incluso antes, las constantes en las ecuaciones de Maxwell eran menos conocidas que el valor de c). La longitud de onda de la luz visible varía aproximadamente entre los límites (en metros)

$$3,8 \cdot 10^{-7} < \lambda < 7,4 \cdot 10^{-7} \quad \text{y por tanto} \quad 1,4 \cdot 10^6 < k < 2,6 \cdot 10^6,$$

que según la fórmula $v_p = \nu/k$, corresponde al rango de frecuencias

$$4,0 \cdot 10^{14} < \nu < 7,9 \cdot 10^{14}.$$

Las frecuencias menores son los infrarrojos y las mayores los ultravioletas. Para hacerse una idea, las frecuencias en un receptor de radio (FM) varían entre $8,75 \cdot 10^7$ y $1,08 \cdot 10^8$ y en un horno microondas son del orden de $2,5 \cdot 10^9$ (por cierto, con una sencilla cuenta se deduce que las microondas no son tan “micro”, pues tienen longitudes de unos cuantos centímetros).

La difracción es más evidente para tamaños comparables a la longitud de onda, por ello no es fácil observarla con luz visible. La dependencia de la difracción con la frecuencia, sugiere que para simplificar consideremos ondas monocromáticas, es decir, de la forma

$$(2.21) \quad u(x, y, z, t) = U(x, y, z)e(-\nu t).$$

Por representar una onda electromagnética (la luz), debe satisfacer la ecuación de ondas

$$(2.22) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u.$$

Para nuestro análisis serán importantes las ondas con simetría esférica. De algún modo esto es una herencia del principio de Huygens.

Proposición 2.2.6. *Supongamos que $U = U(x, y, z)$ tiene simetría esférica, es decir, $U(x, y, z) = f(r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Entonces (2.21) satisface la ecuación de ondas (2.22) en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ si y sólo si*

$$f(r) = A_1 r^{-1} e(kr) + A_2 r^{-1} e(-kr)$$

donde A_1 y A_2 son constantes y $k = \nu/c$.

Demostración. Un cálculo con la regla de la cadena prueba

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r^{-2} x^2 f(r) + r^{-3} (y^2 + z^2) f'(r).$$

Permutando las variables y sumando las tres parciales segundas, se obtiene

$$\Delta f = f'' + 2r^{-1} f'.$$

Por hipótesis u satisface la ecuación de ondas (2.22) con $c = \nu/k$, lo cual se puede escribir como

$$rf'' + 2f' = -4\pi^2 k^2 r f.$$

El primer miembro es $(rf)''$ y basta emplear que la solución general de $y'' + 4\pi^2 k^2 y = 0$ es $y(r) = A_1 e(kr) + A_2 e(-kr)$. \square

En varias fórmulas aparecerá la variación espacial de una onda esférica, sintetizada como el sencillo cálculo

$$(2.23) \quad \nabla(\|\mathbf{x}\|^{-1} e(k\|\mathbf{x}\|)) = \|\mathbf{x}\|^{-2} e(k\|\mathbf{x}\|) (2\pi i k - \|\mathbf{x}\|^{-1}) \mathbf{x}.$$

Nuestra intuición y cursos anteriores de análisis, sugieren que una solución de la ecuación de ondas viene determinada por unos valores iniciales y velocidades iniciales. En el caso de (2.21) las derivadas con respecto al tiempo en $t = 0$ están de nuevo relacionadas con U , por tanto cabe esperar una situación como la del *problema de Dirichlet* $\Delta u = 0$, en el que la solución en un dominio con frontera compacta viene dada por los valores en dicha frontera.

El resultado relevante en este contexto se debe a G. Kirchhoff.

Teorema 2.2.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio acotado cuyo borde $\partial\Omega$ es una superficie regular S y sea \mathbf{q} un punto interior de Ω . Si (2.21) es solución de la ecuación de ondas (2.22) en un dominio que contiene a Ω ; entonces, con la orientación positiva de S ,*

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \nabla U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \right) \right) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{x}).$$

Demostración. La ecuación de ondas (2.22) es invariante por traslaciones, por consiguiente se puede suponer $\mathbf{q} = \vec{0}$. Sea $\Omega' = \Omega - B_\epsilon$ donde B_ϵ es la bola centrada de radio ϵ (pequeño). Por la *identidad de Green* (integración por partes en \mathbb{R}^3)

$$\int_{\Omega'} \left(U \Delta \left(\frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \right) - \frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \Delta U \right) dV = \int_{\partial\Omega'} \left(U \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \right) - \frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \nabla U \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

Tanto $U(\mathbf{x})e(-\nu t)$ como $\|\mathbf{x}\|^{-1} e(k\|\mathbf{x}\| - \nu t)$ satisfacen la ecuación de ondas (por la Proposición 2.2.6), por tanto la primera integral es nula. La frontera $\partial\Omega'$ está compuesta por $\partial\Omega = S$ y por ∂B_ϵ , esta última negativamente orientada. Así pues con orientaciones positivas y tomando límites

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B_\epsilon} \left(U \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \right) - \frac{e(k\epsilon)}{\epsilon} \nabla U \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(U \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \right) - \frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \nabla U \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

El segundo término del primer integrando no contribuye, porque $|\partial B_\epsilon| = 4\pi\epsilon^2$ (el área de la esfera) y $|\partial B_\epsilon|\epsilon^{-1} \rightarrow 0$. Entonces sólo resta probar

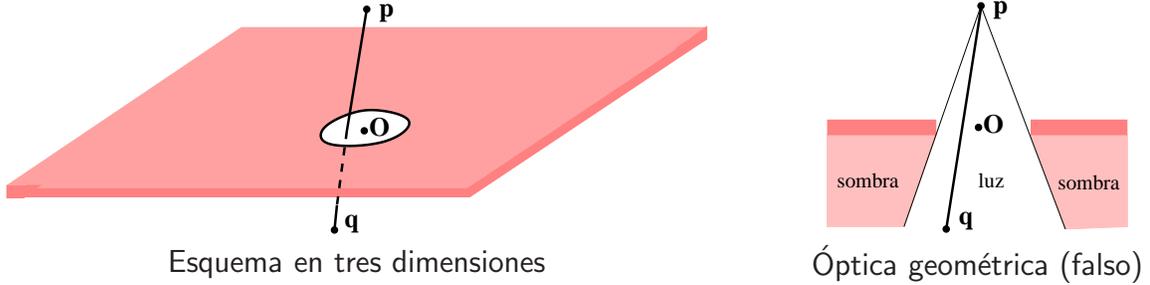
$$4\pi U(\vec{0}) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_\epsilon} U(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

Empleando (2.23), para los $\mathbf{x} \in \partial B_\epsilon$ se tiene

$$-\nabla(\|\mathbf{x}\|^{-1}e(k\|\mathbf{x}\|)) = e(k\epsilon)(\epsilon^{-2} - 2\pi ik\epsilon^{-1})\epsilon^{-1}\mathbf{x}.$$

Se cumple $\int_{\partial B_\epsilon} \epsilon^{-1}\mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} = |\partial B_\epsilon| = 4\pi\epsilon^2$ porque $\epsilon^{-1}\mathbf{x}$ es la normal unitaria exterior de ∂B_ϵ , y para finalizar basta apelar al teorema del valor medio para integrales. \square

La situación física en la que analizaremos la difracción es la siguiente: Consideramos el plano $z = 0$ como una pantalla opaca en la que hay una abertura \mathcal{A} en un entorno del origen. En $z > 0$ tenemos una fuente de luz puntual en \mathbf{p} y queremos saber cuál es la intensidad de la luz en un punto arbitrario \mathbf{q} de $z < 0$. Basándonos en nuestra experiencia habitual, la óptica geométrica, el punto \mathbf{q} estará iluminado si el segmento \mathbf{pq} atraviesa \mathcal{A} , mientras que el resto de los puntos de $z < 0$ permanecerá en sombras.



El modelo de difracción que veremos, muestra que realmente la previsión de la óptica geométrica no es correcta por la naturaleza ondulatoria de la luz y también explica por qué en primera aproximación nos parece cierta. Dicho modelo, no es del todo exacto [BW65, XI] pues conlleva algunas aproximaciones pero son naturales desde el punto de vista físico y los resultados coinciden con lo observado en los experimentos.

En primer lugar, aplicamos el Teorema 2.2.7 a un dominio acotado Ω muy grande incluido en $z \leq 0$ tal que \mathcal{A} esté en su borde $\partial\Omega = S$. Este dominio intenta aproximar $z \leq 0$ e idealmente es todo el semiespacio. En los puntos de S que no están en \mathcal{A} , es natural suponer $U = 0$, o bien porque están demasiado lejos de la fuente de luz, o bien porque están en el borde inferior de $z = 0$ pero no en \mathcal{A} y nuestra experiencia sugiere allí una sombra total (pensamos que la óptica geométrica requiere correcciones pero no que sea completamente falsa haciendo increíble que los rayos se curven 90 grados). Con esta aproximación,

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \nabla U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \right) \right) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{x}).$$

donde \mathcal{A} está orientada con la normal hacia arriba $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

Una onda esférica que parte de la fuente puntual \mathbf{p} corresponde a la fórmula indicada en la Proposición 2.2.6 salvo una traslación del origen a \mathbf{p} . Para simplificar, sólo consideraremos la parte con k positivo (ondas que avanzan desde la fuente). Entonces, si no estuviera la pantalla que contiene a la abertura \mathcal{A} , la solución sería

$$(2.24) \quad U(\mathbf{x}) = K \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^{-1} e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) \quad \text{con } K \text{ una constante.}$$

Supongamos que esta fórmula sigue siendo correcta en $z > 0$ cuando ponemos la pantalla. Matemáticamente esto parece un poco dudoso porque “pegar” dos soluciones de la ecuación de ondas, una en cada semiespacio, no está claro que pueda hacerse de forma regular. Sin embargo, físicamente sería muy extraño pensar que interponer una pantalla opaca completamente negra (para evitar reflexiones), tenga alguna influencia en las ondas que parten de \mathbf{p} . Entonces la fórmula anterior debería ser válida en la apertura \mathcal{A} . Así pues,

$$U(\mathbf{q}) = K \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} \right) - \frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \right) \right) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{x}),$$

donde se ha redefinido el valor de la constante K .

Recordemos que para la luz visible el número de ondas k es del orden de millones, por tanto en (2.23) podemos despreciar el término $\|\mathbf{x}\|^{-1}$ dentro del paréntesis para tamaños macroscópicos de $\|\mathbf{x}\|$. Suponemos que \mathbf{p} y \mathbf{q} están separados de la pantalla y que por tanto $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|$ tienen tamaños macroscópicos cuando $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, con lo cual nuestra aproximación pasa a ser

$$(2.25) \quad U(\mathbf{q}) = \frac{K}{\lambda} \int_{\mathcal{A}} \frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \right) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{x}),$$

donde se ha redefinido de nuevo el valor de la constante K , que ahora es una constante compleja, y se ha usado que $k = \lambda^{-1}$.

Finalmente, supondremos que \mathcal{A} tiene un tamaño muy reducido en comparación con su distancia a \mathbf{p} y a \mathbf{q} y que los puntos \mathbf{p} y \mathbf{q} están cerca de estar alineados con ella. Todo esto está de nuevo motivado porque tenemos en mente una corrección pequeña sobre la idea de que los rayos viajan en línea recta.

Bajo estas hipótesis, el ángulo que forma $\vec{n} = (0, 0, 1)$ con $\mathbf{x} - \mathbf{q}$ para $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ es muy similar al que forma con $\mathbf{p} - \mathbf{x}$ o con $\mathbf{p} - \mathbf{q}$, digamos $\beta = \beta(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Entonces

$$\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \right) \cdot \vec{n} \approx \cos(\pi - \beta) - \cos \beta = -2 \cos \beta.$$

Además $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \approx \|\mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| \approx \|\mathbf{q}\|$ sin presentar apenas variación cuando se integra sobre \mathcal{A} . Introduciendo estas aproximaciones en (2.25) y redefiniendo una vez más la constante K , se llega a

$$(2.26) \quad U(\mathbf{q}) = \frac{K \cos \beta}{\lambda \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|} \iint_{\mathcal{A}} e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|) \, dx dy$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, 0)$ y A es \mathcal{A} considerada en el plano XY en lugar de en el espacio.

Dicho sea de paso, si sólo usamos que \mathbf{p} está muy lejano, digamos que $\mathbf{p} = (0, 0, p_3)$ con $p_3 \rightarrow +\infty$, de forma que la onda esférica (2.24) degenera en una onda plana paralela a \mathcal{A} , entonces la aproximación sin quitar el denominador $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|$ sería

$$(2.27) \quad U(\mathbf{q}) = \frac{K \cos \beta}{\lambda \|\mathbf{p}\|} \iint_A \frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} (1 + \cos \gamma) \, dx dy$$

donde γ es el ángulo entre \vec{n} y $\mathbf{q} - \mathbf{x}$, que es muy similar al formado entre \mathbf{q} y $-\vec{n}$. Ésta es una realización del principio de Huygens porque $e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)/\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|$ son ondas esféricas que parten de \mathcal{A} . El factor $1 + \cos \gamma$ favorece que las ondas viajen “hacia delante” (es cero para $\gamma = \pi$ y máximo para $\gamma = 0$). Esta forma corregida y bastante precisa del principio de Huygens fue introducida por A. Fresnel.

Incluso tras todas estas simplificaciones, la integral oscilatoria en (2.26) es demasiado complicada para llevar a cabo cálculos explícitos. Afortunadamente con aproximaciones lineales de la fase ya se tienen resultados importantes en óptica. Cuando se toman estas aproximaciones lineales, se habla de *difracción de Fraunhofer* (J. Fraunhofer fue el primero en analizar las frecuencias de la luz de los astros) y cuando se toman aproximaciones cuadráticas, se habla de *difracción de Fresnel*. Este último análisis sólo aporta novedades cuando \mathbf{p} o \mathbf{q} están cerca de la pantalla [BW65, §8.3.3].

El desarrollo de Taylor hasta grado uno con resto, asegura

$$\begin{cases} \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{p}\| - \frac{p_1 x + p_2 y}{\|\mathbf{p}\|} + O\left(\frac{x^2 + y^2}{\|\mathbf{p}\|}\right) & \text{con } \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| = \|\mathbf{q}\| - \frac{q_1 x + q_2 y}{\|\mathbf{q}\|} + O\left(\frac{x^2 + y^2}{\|\mathbf{q}\|}\right) & \text{con } \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Entonces la difracción de Fraunhofer responde a la fórmula

$$(2.28) \quad U(\mathbf{q}) = e(k(\|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\|)) \frac{K \cos \beta}{\lambda \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|} \hat{\chi}_A\left(\frac{kp_1}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{kq_1}{\|\mathbf{q}\|}, \frac{kp_2}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{kq_2}{\|\mathbf{q}\|}\right)$$

donde $\hat{\chi}_A$ es la transformada de Fourier en \mathbb{R}^2 de la función característica de A , esto es

$$\hat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \iint_A e(-\xi_1 x - \xi_2 y) \, dx dy.$$

La mayor contribución en (2.28) se producirá cuando la integral no sea oscilatoria, es decir, cuando

$$\frac{kp_1}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{kq_1}{\|\mathbf{q}\|} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{kp_2}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{kq_2}{\|\mathbf{q}\|} = 0.$$

Esto es lo mismo que decir que las dos primeras coordenadas de los vectores unitarios $\mathbf{p}/\|\mathbf{p}\|$ y $\mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$ son opuestas. Como ambos son unitarios y uno está a cada lado del plano XY , entonces las terceras coordenadas también serán opuestas.

En definitiva, fuera del caso en que \mathbf{p} , el origen y \mathbf{p} estén alineados o casi alineados en (2.28) habrá una integral oscilatoria que induce cancelación. Con esto tenemos una explicación matemática de por qué en primera aproximación nos parece que la luz se propaga en línea recta. Se podría argüir que en realidad esto apareció como hipótesis aproximada en la propia deducción pero en realidad sólo se usó para quitar términos no oscilatorios.

Después de este desarrollo teórico, analizaremos dos ejemplos básicos (véase [Wal96] para otros con datos concretos).

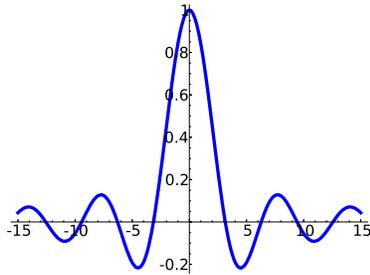
Para una abertura cuadrada de lado δ , $A = [-\delta/2, \delta/2] \times [-\delta/2, \delta/2]$, se tiene

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \frac{\text{sen}(\pi\xi_1\delta) \text{sen}(\pi\xi_2\delta)}{\pi^2\xi_1\xi_2}.$$

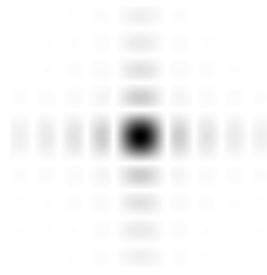
Si la fuente de luz \mathbf{p} está en $(0, 0, p_3)$, se obtiene

$$\left| \widehat{\chi}_A\left(\frac{kq_1}{\|\mathbf{q}\|}, \frac{kq_2}{\|\mathbf{q}\|}\right) \right|^2 = \|\mathbf{q}\|^2 \frac{\text{sen}^2(\pi\delta kq_1/\|\mathbf{q}\|) \text{sen}^2(\pi\delta kq_2/\|\mathbf{q}\|)}{\pi^2 k^2 q_1^2 q_2^2}.$$

Si ponemos una segunda pantalla en $z = q_3$ fijado, entonces en experimentos reales se ve un esquema de luces y sombras correspondientes a los valores de la función anterior (véase [Wal96] para una foto real). La fase de la luz no se ve en una pantalla, lo que se ve es su *intensidad* que físicamente representa la densidad de potencia por unidad de área y en el caso de la luz es proporcional al cuadrado del módulo de la función (2.21) que define la onda.



$f(x) = x^{-1} \text{sen}(x)$



“Intensidad” de $f(x)f(y)$

Un caso más simétrico es cuando A es una abertura circular de radio δ , para el cual

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \iint_{x^2+y^2 < \delta^2} e(-\xi_1 x - \xi_2 y) \, dx dy.$$

La simetría del problema implica que $\widehat{\chi}_A$ es radial (y es un interesante ejercicio probarlo matemáticamente). En particular $\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \widehat{\chi}_A(0, R)$ con $R = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ y se tiene

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\sqrt{\delta^2-x^2}}^{\sqrt{\delta^2-x^2}} e(-Ry) \, dy dx = \frac{1}{\pi R} \int_{-\delta}^{\delta} \text{sen}(2\pi R\sqrt{\delta^2-x^2}) \, dx.$$

El cambio $x \mapsto \pm\delta\sqrt{1-x^2}$ con \pm el signo de x , prueba

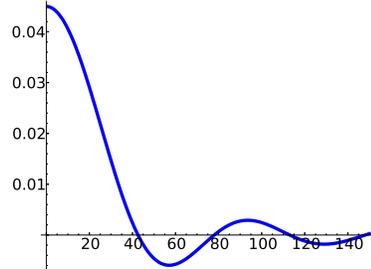
$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \frac{\delta}{\pi R} \int_{-1}^1 x \frac{\sin(2\pi R\delta x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\delta}{R} J_1(2\pi R\delta),$$

donde se ha usado la definición (2.18) de J_1 .

Según (2.20),

$$\left| \widehat{\chi}_A\left(\frac{kq_1}{\|\mathbf{q}\|}, \frac{kq_2}{\|\mathbf{q}\|}\right) \right|^2 \sim \frac{\delta}{\pi^2 R^3} \sin^2\left(2\pi R\delta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{con } R = k \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\|\mathbf{p}\|}$$

cuando $R\delta$ es grande. Esto revela un esquema de difracción en anillos (véanse fotos reales en [BW65] y [Wal96, §6])



$$f(x) = x^{-1} J_1(0,09x)$$



“Intensidad” de $f(\sqrt{x^2 + y^2})$

Los anillos se separan más cuanto menor es δ , haciendo el efecto bien distinto de nuestra experiencia cotidiana. Cuando $R\delta$ es pequeño, con Taylor sobre (2.19) es fácil deducir

$$\left| \widehat{\chi}_A\left(\frac{kq_1}{\|\mathbf{q}\|}, \frac{kq_2}{\|\mathbf{q}\|}\right) \right|^2 \sim \pi^2 \delta^4$$

Si queremos que la intensidad de los primeros anillos sea comparable a la intensidad en el centro de la pantalla para verlos bien, entonces δ^4 debería ser comparable a δ/R^3 . Recordando que para la luz visible $\lambda = k^{-1}$ es menor que una *micra* (una milésima de milímetro), se sigue que este tamaño de δ sería conveniente para observar cómodamente la difracción.