1.2. Aprendiendo a sumar

Todos nos quedamos anonadados cuando nos contaron por primera vez la evaluación

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots=1. \tag{1.15}$$

El primer asombrado fue G.W. Leibniz, a quien calcular esta suma le orientó hacia las Matemáticas y que llegó a decir que le había sugerido la relación entre derivadas e integrales.

Después de un tiempo, dejamos en el olvido el *truco telescópico* (o más bien "cataléjico", cada objeto se anula con el anterior), en parte porque es demasiado particular y en parte porque perdimos la esperanza de evaluar sumas infinitas. Matemáticos muy inteligentes han mostrado que todavía el truco se puede explotar para construir una bella y flexible teoría [PWZ96] pero nosotros, con el análisis en mente, todavía creemos que nuestra mejor baza es la aproximación más que la evaluación.

A este respecto, será conveniente disfrazar estimaciones como igualdades utilizando la *notación de Landau* por la que $O(g)$ y $o(g)$ significan respectivamente funciones f tales que $\limsup|f|/g<\infty$ y $\lim f/g=0$, donde los límites típicamente serán cuando la variable tiende a ∞. Una variante que a veces es más manejable es la *notación de Vinogradov* que consiste en utilizar $f\ll g$ y $f\gg g$ para indicar $f=O(g)$ y $g=O(f)$. Cuando ambas relaciones se cumplen simultáneamente, un símbolo empleado a veces es $f\asymp g$. La igualdad asintótica, esto es $\lim f/g=1$, se representa mediante $f\sim g$.

1.2.1. Sumación por partes

La sumación por partes es una forma discreta de la integración por partes con una finalidad similar.

Digamos por ejemplo que queremos estimar la suma $S_N=\sum_{n\le N}(n+1)^{-1/2}\log^2 n$. Es natural esperar $S_N\sim\int_1^N(x+1)^{-1/2}\log^2 x\,dx$. En esta integral, $\log^2 x$ apenas varía en comparación con $(x+1)^{-1/2}$ por ello también es natural pensar que se tiene $S_N\sim\log^2 N\int_1^N(x+1)^{-1/2}\,dx\sim 2\sqrt{N}\log^2 N$. Para probar esto último rigurosamente, basta integrar por partes:

$$\int_1^N\frac{\log^2 x}{\sqrt{x+1}}\,dx=2\sqrt{N+1}\log^2 N-4\int_1^N\sqrt{x+1}\,\frac{\log x}{x}\,dx=2\sqrt{N}\log^2 N+O\big(\sqrt{N}\log N\big).$$

La sumación por partes permite trabajar directamente con las sumas, sin necesidad de que los sumandos estén representados por funciones regulares ni que haya una aproximación previa por integrales.

La versión más básica de la sumación por partes se usa sobre todo para acotar más que para estimar.

Lema 1.2.1 (Sumación por partes)**.** *Se cumple la identidad*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N S_N + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n$$

donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$*. Además, si* $(a_n)_{n=1}^{N}$ *es real monótona no creciente y positiva, se tiene la acotación*

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\Big| \le a_1 \sup_{1\le n\le N} |S_n|.$$

Demostración. Para la identidad, basta escribir $b_n = S_n - S_{n-1}$ y agrupar convenientemente los términos. La acotación se sigue tomando valores absolutos y notando que $|a_N| + \sum_{n=1}^{N-1} |a_n - a_{n+1}| = a_1$ porque la suma es telescópica. □

A menudo se aplica la acotación anterior después de subdividir en *intervalos diádicos*, es decir, considerando $2^j \le n < 2^{j+1}$, con ello se busca evitar problemas con el infinito y que otros a_n, no sólo el a_1, participen en la acotación para hacerla más precisa.

Como primer ejemplo, probaremos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \cos(n\sqrt{2})$ que no aparece en los cursos básicos de Cálculo porque no es una serie absolutamente convergente y el *criterio de Leibniz* ($\sum (-1)^n c_n$ converge si c_n decrece a cero) es inaplicable. Tomando $a_n = (n+M)^{-1/2}$ y $b_n = \cos\big((n+M)\sqrt{2}\big)$ en el Lemma 1.2.1, se tiene

$$\sum_{n=M+1}^{L} n^{-1/2} \cos(n\sqrt{2}) \le (M+1)^{-1/2} \sup_{M<n\le L} \frac{1}{2}\Big|D_n\big(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\big) - D_M\big(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\big)\Big| \ll (M+1)^{-1/2}.$$

Así, cuando $L > M \to \infty$ se tiene $S_L = S_M + o(1)$ y por tanto la serie converge (las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy). El mismo argumento sirve para probar que $\sum n^{-1/2} \cos(2\pi n x)$ converge para todo $0 < x < 1$ (uniformemente sobre compactos) a pesar de que por (1.10) sabemos que ni siquiera es de cuadrado integrable [Zyg77, I,(2.6)].

Parece que las aplicaciones juiciosas de la sumación por partes a series infinitas están limitadas al caso en que $a_n - a_{n+1} \to 0$, sin embargo algunos métodos de aceleración de series contradicen esta idea. Si c_n decrece a cero, tomando $a_n = (-1)^{n-1}$ y $b_n = c_n - c_{n+1}$ en el Lema 1.2.1, se deduce la igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (c_n - c_{n+1}).$$

El método de aceleración de series con *transformadas de Euler* consiste en aplicar indefinidamente esta igualdad. Sin llegar a ese límite, notemos que por ejemplo, para

$c_n = 1/(2n-1)$ la serie de la derecha da un error 10 veces menor que la segunda al aproximar $\pi/4 = \sum(-1)^{n-1}c_n$ cuando se usan 5 términos, y usando 50 términos el error se hace 100 veces menor. Este tipo de trucos son muy a tener en cuenta para aumentar la rapidez de cálculos masivos con ordenador.

Una versión un poco más compleja de la sumación partes se utiliza primordialmente cuando se quiere ir más allá de una acotación. Lleva asociado el nombre de N.H. Abel, el genial matemático que se escandalizó de que en su tiempo hubiera tan poco hecho sobre convergencia (escribió: "salvo casos muy simples [...] ni una serie infinita ha sido sumada rigurosamente [...] Es cierto que la mayoría son válidas, pero es muy sorprendente").

Lema 1.2.2 (Lema de Abel)**.** *Sea* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión arbitraria de números complejos y sea* $C(t) = \sum_{n\le t} c_n$*. Dado* $x \ge 1$*, para cualquier* $g : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$*,* $g \in C^1$*, se verifica*

$$\sum_{n\le x} c_n g(n) = C(x)g(x) - \int_1^x C(t)g'(t)\,dt.$$

Es posible deducir este resultado del Lema 1.2.1 o incluso dar una prueba directa en pocas líneas [Ell75, Th.1.6], sin embargo preferimos aquí una prueba avanzada pero ilustrativa.

Demostración. Por continuidad podemos suponer que x no es entero, entonces el primer miembro es $\int_{1/2}^{x} h(t)g(t)\,dt$ con $h(t) = \sum c_n\delta(t-n)$ y δ la delta de Dirac. Como $C'(t) = h(t)$, el resultado se reduce a integrar por partes. El uso de deltas de Dirac se justifica mediante aproximaciones de la identidad. □

Aplicando el Lema 1.2.2 con $c_n = 1$ y $g(t) = 1/t$ se deduce

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[t]}{t^2}\,dt = \log x + \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[t]-t}{t^2}\,dt.$$

donde $[\,\cdot\,]$ indica la parte entera. Escribiendo la integral como $\int_1^x = \int_1^\infty - \int_x^\infty = \text{cte} + O(x^{-1})$, se concluye el resultado clásico $\sum_{n\le x} n^{-1} = \log x + \gamma + O(x^{-1})$, donde $\gamma = 0{,}577\ldots$ es una constante llamada *constante de Euler*.

Dos funciones básicas en la teoría de la distribución de primos son $\pi(x)$, el número de primos en $[1,x]$, y $\psi(x)$, el logaritmo del mínimo común múltiplo de los enteros en ese mismo rango. Esta última función fue introducida por P. Chebyshev en sus importantes trabajos sobre los primos que culminaron con su prueba del *postulado de Bertrand* (entre un número mayor que 1 y su doble siempre hay un primo). En principio $\psi(x)$ es muy poco natural pero más adelante veremos que de cara a ciertas estimaciones, lo es más que $\pi(x)$. Una fórmula alternativa más manejable para ψ es:

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \qquad \text{donde} \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ con } p \text{ primo} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A la función Λ se le llama *símbolo de von Mangoldt*.

El *teorema de los números primos* asegura $\psi(x) \sim x$ y la sumación por partes traslada este resultado a $\pi(x)$ como $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x dt/\log t$, el *logaritmo integral*.

Lema 1.2.3. *Si se cumple $\psi(x) = x + O(E(x))$ para cierta función creciente y positiva E, entonces también se cumple $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{1/2} + E(x)/\log x)$. De hecho*

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \frac{\psi(x) - x}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t) - t}{t(\log t)^2}\, dt + O(x^{1/2}).$$

Demostración. La primera parte se deduce de la segunda, ya que el integrando está acotado por $-E(x)(1/\log t)'$.

Es fácil ver que $\pi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)/\log n + O(x^{1/2}\log x)$. De hecho con un poco de esfuerzo se reduce el error a $O(x^{1/2})$. El Lema 1.2.2 con $c_n = \Lambda(n+1)$ y $g(x) = 1/\log(x+1)$ prueba $\pi(x) = \psi(x)/\log x - \int_2^x \psi(t)/(t(\log t)^2)\, dt + O(x^{1/2})$, que es equivalente a la fórmula buscada. □

1.2.2. La fórmula de sumación de Poisson

Si en (1.4) multiplicamos en ambos miembros por una función e integramos en $\mathbb{R}$, se obtiene la magnífica fórmula de sumación de Poisson que transforma una suma sobre enteros en otra:

$$\delta_P(x) = \sum e(nx) \ \Rightarrow\ \int f(x)\delta_P(x) = \sum \int f(x)e(nx) \ \Rightarrow\ \sum f(n) = \sum \widehat{f}(n).$$

Lo más difícil a la hora de establecer esta fórmula es dar condiciones que aseguren la convergencia de las series del enunciado y la prueba. Una posibilidad tomada de [DM72] es la siguiente (véase en [Zyg77, I, (13.5)] una versión con hipótesis débiles):

Teorema 1.2.4 (Fórmula de sumación de Poisson)**.** *Para cualquier $f \in C^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo $|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| = O\big((1+|x|)^{-2}\big)$, se verifica*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

Demostración. Considérese la función $F(x) = \sum_m f(m+x)$. Sus coeficientes de Fourier son $a_n = \sum \int_m^{m+1} f(x)e(-nx)\, dx = \widehat{f}(n)$ (las hipótesis aseguran convergencia absoluta de la serie de Fourier) y la fórmula se deduce de que $F(0) = \lim S_N f(0)$. □

Si formalmente elegimos como f la función característica de un conjunto de enteros, este resultado nos daría que su cardinal se expresa en términos de integrales oscilatorias. En muchas ocasiones, estas integrales se aproximan a su vez por funciones oscilatorias (ondas) y parte de la importancia de la fórmula de sumación de Poisson en teoría analítica de números radica en su capacidad para contar enteros a través de interferencias de ondas.

Por supuesto, esta descripción es sólo un boceto porque ya de partida, una función característica no es C^2 y para funciones poco regulares hay problemas de convergencia en el segundo miembro. Por otro lado, la fórmula de sumación de Poisson es involutiva, es decir, de un sólo uso, al aplicarla dos veces recuperamos la suma original. Todo ello no es óbice para que los expertos en teoría analítica de números canten sus virtudes. Así leemos en §5.4 de [Hux96]:

> The exponential $e(t)$ is the violin of the mathematical orchestra, and $\rho(t)[= 1/2 - \operatorname{Frac}(t)]$ is the flute, its themes are developed by the violins. Poisson summation is the tuba: very deep, but ridiculous when used too much.

Y en la introducción de [IK04]:

> Poisson summation for number theory is what a car is for people in modern communities –it transports things to other places and it takes you back home when applied next time– one cannot live without it.

Veamos un ejemplo concreto del Teorema 1.2.4. En analogía con la historia del pequeño C.F. Gauss y la suma de $1 + 2 + \cdots + 100$, imaginemos a un profesor malvado que exige el valor de $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2/100}$ con unas pocas cifras decimales a una clase de estudiantes armados sólo con calculadoras científicas. Eligiendo en el Teorema 1.2.4 $f(x) = e^{-x^2/100}$ y usando (1.14) se tiene

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e(nx)\, dx = 10\sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-100\pi^2 n^2}$$

y el alumno aventajado escribiría triunfante en su pizarra $0 < S - 10\sqrt{\pi} < 10^{-400}$ donde 10^{-400} es una estimación generosa de la cola de la serie.

Cuando un ejemplo funciona bien es conveniente convertirlo en un resultado y, con suerte, quizá en una teoría. Aquí reformularemos el ejemplo anterior con una notación que nos acerca mínimamente al origen de la teoría de formas modulares. Consideremos la *función θ de Jacobi* (la normalización difiere de la habitual y de la original de C.G.J. Jacobi)

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n^2 z) \qquad \text{para } z \in \mathbb{H} \tag{1.16}$$

donde $\mathbb{H}$ es el semiplano superior $\{x+iy \ : \ x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$, para asegurar la convergencia.

Proposición 1.2.5. *Para todo $z \in \mathbb{H}$, se verifica*

$$\theta(z) = \sqrt{\frac{i}{2z}}\,\theta\big(\frac{-1}{4z}\big),$$

donde en $\sqrt{\ }$ se escoge la rama habitual que envía $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$.

Demostración. Aplicar el Teorema 1.2.4 a $f(x) = e(zx^2)$. □

Al combinar esta especie de invariancia de θ por $z \mapsto -1/4x$ con la obvia por $z \mapsto z + 1$, se obtienen una serie de simetrías que son relevantes en la teoría de formas modulares. Históricamente, una de sus primeras consecuencias fue que el número de representaciones de un entero n como suma de 4 cuadrados, $r_4(n)$, responde a la fórmula sencilla

$$r_4(n) = 8\Big(\sigma(n) - \sigma\big(\frac{n}{4}\big)\Big) \qquad \text{donde } \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

y donde se entiende $\sigma(n/4) = 0$ si $4 \nmid n$. El esquema de la prueba clásica es demostrar que las funciones que tienen las mismas simetrías que θ^4 forman un espacio vectorial de dimensión 2 (sobre $\mathbb{C}$) y demostrar también que

$$f_1(z) = 1+24\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sigma(n)-2\sigma\big(\frac{n}{2}\big)\Big)e(nz) \quad \text{y} \quad f_2(z) = 1+24\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sigma\big(\frac{n}{2}\big)-2\sigma\big(\frac{n}{4}\big)\Big)e(nz)$$

son dos ejemplos con tales simetrías (con el lenguaje adecuado esto último es más sencillo de lo que parece). Por tanto, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tales que $\theta^4(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n)e(nz) = \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$. Ajustando λ_1 y λ_2 para que los dos primeros coeficientes cuadren, se deduce la fórmula para $r_4(n)$.

Otra manera de entender la fórmula de sumación de Poisson es a través del desarrollo de Fourier de la función $\{x\} = x - [x] - 1/2$, que es la parte fraccionaria normalizada para que su promedio sea nulo.

$$\{x\} = \frac{i}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{e(nx)}{n} = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{n}, \tag{1.17}$$

donde la igualdad, como hemos visto, no se da para $x \in \mathbb{Z}$ por la convergencia al punto medio (Teorema 1.1.2).

No es difícil deducir del Lema de Abel (Lema 1.2.2) con $c_n = 1$, la identidad

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(1) + f(N)\big) + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx. \tag{1.18}$$

Sustituyendo (1.17), la última integral es $2\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^N f(x)\cos(2\pi nx)\,dx$ después de integrar por partes. Aquí hemos pasado de puntillas sobre el problema de intercambiar suma e integral. Se puede demostrar que si $f \in C^2$, no hay problema. Suponiendo esto, con un poco más de esfuerzo se deduce una fórmula de sumación de Poisson para intervalos finitos.

Proposición 1.2.6. *Sean $M, N \in \mathbb{Z}$ con $M > N$ y sea $f \in C^2$. Entonces*

$$\sum_{n=N}^{M} f(n) = \frac{1}{2}\big(f(N)+f(M)\big) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_N^M f(x)e(nx)\,dx.$$

Demostración. Según el argumento anterior a partir de (1.18), empleando $e(-nx) + e(nx) = 2\cos(2\pi nx)$ y $e(0) = 1$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{M} f(n) = \frac{1}{2}\big(f(1)+f(N)\big) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_1^M f(x)e(nx)\,dx.$$

Cambiando N por M y restando las identidades, se obtiene el resultado esperado. □

Una consecuencia indirecta de esto es la evaluación de las *sumas de Gauss*

$$G_N = \sum_{n=1}^{N} e\big(\frac{n^2}{N}\big) \qquad \text{con } N \in \mathbb{Z}^+.$$

A pesar de que esto será una consecuencia más o menos rápida de la Proposición 1.2.6, tiene un contenido aritmético muy profundo y Gauss tuvo que poner mucho esfuerzo hasta conseguir una prueba de la fórmula aparentemente inocente del siguiente resultado.

Proposición 1.2.7. *Para cualquier $N \in \mathbb{Z}^+$ se tiene la fórmula*

$$G_N = \frac{1+(-i)^N}{1-i}\sqrt{N}.$$

Nótese que lo que esto indica es que $N^{-1/2}G_N$ es 4-periódica en $\mathbb{Z}^+$ tomando los valores 1, 0, i y $1+i$ para los cuatro primeros enteros positivos. Para la prueba seguimos [Dav80]. En [IK04] hay una demostración originalísima utilizando integrales oscilatorias y aritmética, mientras que en [Ros88] se puede ver una prueba clásica sin análisis (en general éstas son más complicadas, véase también [Ter99, §8]).

Demostración. Vamos a aplicar la Proposición 1.2.6 a $f(x) = e(x^2/N)$ en el intervalo $[0, N]$. En principio esto excede en 1 el intervalo de sumación de G_N pero el término extra se cancela con la semisuma de $f(0)$ y $F(N)$ y se obtiene

$$G_N = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^N e\big(\frac{x^2}{N}+nx\big)\,dx = N\sum_{n=-\infty}^{\infty} e\big(-\frac{1}{4}Nn^2\big)\int_{n/2}^{1+n/2} e(Nx^2)\,dx$$

donde simplemente se ha hecho el cambio lineal que lleva $[0, N]$ en $[n/2, 1+n/2]$. Separando en la suma los pares de los impares, se deduce

$$\frac{G_N}{N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} e(Nx^2)\,dx + i^{-N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n-1/2}^{n+1/2} e(Nx^2)\,dx = (1+i^{-N}) \int_{-\infty}^{\infty} e(Nx^2)\,dx$$

donde estamos suponiendo que no hay problema con la convergencia, en particular que la integral existe (en el próximo capítulo estudiaremos esto con detalle). Aplicando (1.14) formalmente o tomando límites cuando $a = \epsilon - 2\pi i N$ y $\epsilon \to 0^+$, se sigue que el valor de la integral es $\sqrt{2}\, e(1/8) N^{-1/2} = N^{-1/2}/(1-i)$. $\square$

La humilde fórmula (1.18) da más juego de lo que parece, al menos en manos de un genio como Euler. La idea es tan sencilla como pensar en qué obtendríamos al integrar muchas veces por partes. Definimos los *polinomios de Bernoulli* $\{B_m\}_{m=0}^{\infty}$ mediante la recurrencia

$$B_m'(x) = mB_{m-1}(x) \qquad \text{con} \qquad \int_0^1 B_m = 0 \quad \text{y} \quad B_0 = 1 \quad \text{para } m \in \mathbb{Z}^+.$$

Es decir, esencialmente integrar 1 repetidas veces haciendo mónicos los polinomios resultantes y ajustando la constante de integración para que sus promedios sean cero en $[0, 1]$. También se definen los *números de Bernoulli* como $b_n = B_n(0)$. Algunos ejemplos son:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = x - \frac{1}{2}, \quad B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

Integrando sucesivas veces (1.17), como $B_1(x) = x$, para $0 \le x < 1$, se deduce que los polinomios de Bernoulli tienen una serie de Fourier bonita:

$$B_m(x) = -\frac{m!}{(2\pi i)^m} \sum_{n \ne 0} \frac{e(nx)}{n^m} \qquad \text{para } m > 1.$$

En particular
(1.19)

$$b_{2m} = 2(-1)^{m+1} \frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \Big(\frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \dots \Big) \quad \text{y} \quad b_{2m+1} = 0 \quad \text{para } m \in \mathbb{Z}^+.$$

Por tanto, en contra de lo que sugieren los primeros ejemplos, $\{|b_{2m}|\}$ es una sucesión que crece extremadamente deprisa.

Proposición 1.2.8 (Fórmula de sumación de Euler–Maclaurin)**.** *Sean $N, M, K \in \mathbb{Z}$ tales que $N < M$ y $K > 0$. Para cualquier $f \in C^K\big([N, M]\big)$, la expresión*

$$\sum_{n=N}^{M} f(n) - \int_N^M f - \frac{1}{2}\big(f(N) + f(M)\big)$$

es igual a

$$\sum_{n=2}^{K}\frac{b_n}{n!}\big(f^{(n-1)}(M)-f^{(n-1)}(N)\big)+\frac{(-1)^{K+1}}{K!}\int_N^M f^{(K)}(x)B_K(x-[x])\,dx.$$

Para $K=1$ el último sumatorio es vacío y se recupera (1.18). Más interesantes son los casos con $K>1$. Por ejemplo, si $f(x)=x^3$, $K=4$ y $N=1$, recuperamos la bella fórmula para la suma de los cubos:

$$\sum_{n=1}^{M}n^3=\frac{1}{4}(M^4-1)+\frac{1}{2}(M^3+1)+\frac{1/6}{2!}(3M^2-3)+0=\frac{M^2(M+1)^2}{4}.$$

Véase en [Spi84, 707–708] una explicación “operacional” de la Proposición 1.2.8 para polinomios.

Demostración. La recurrencia implica $B_{K+1}(x-[x])-b_{K+1}=(K+1)\int_N^x B_K(t-[t])\,dt$ donde tomar $t-[t]$ no da ningún problema por la propiedad de promedio nulo. Integrando por partes, la última integral en el enunciado de la proposición es:

$$\frac{b_{K+1}}{K+1}\big(f^{(K)}(M)-f^{(K)}(N)\big)-\frac{1}{K+1}\int_N^M f^{(K+1)}(x)B_{K+1}(x-[x])\,dx$$

y la prueba se sigue por inducción a partir del caso $K=1$ que es (1.18). Nótese que $(-1)^{K+1}b_{K+1}=b_{K+1}$ porque para K par, $b_{K+1}=0$. $\square$

1.2.3. Técnicas de variable compleja

Nuestros primeros paseos por la variable real nos desvelaron un mundo plagado de funciones monstruosas: continuas pero no diferenciables en ningún punto, C^∞ pero no *analíticas* (no desarrollables como su serie de Taylor), satisfaciendo el teorema de los valores intermedios pero no continuas.

En cambio, la variable compleja desde el principio volvía a poner las cosas en su sitio: las funciones holomorfas (derivables en un entorno de un punto) eran automáticamente C^∞ e incluso analíticas. Además había una serie de hechos milagrosos, basados de una forma u otra en que al integrar una función holomorfa a lo largo de una curva el resultado no depende de pequeñas variaciones con los extremos fijos.

Esto tiene una explicación razonable. Cuando consideramos una función holomorfa, $f'(z)=\lim_{h\to 0}\big(f(z+h)-f(z)\big)/h$ establece unas relaciones entre las derivadas parciales de $u=\Re(f)$ y $v=\Im(f)$ como funciones de $x=\Re(z)$ e $y=\Im(z)$, llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann*. Estas ecuaciones son equivalentes a decir que la forma diferencial $(u+vi)\,dx+(-v+ui)\,dy=f(z)\,dz$ es cerrada, esto es, que el “rotacional” que aparece en el teorema de Green se anula y entonces la integral de línea es siempre cero, el campo es conservativo. Si una función f es holomorfa en un abierto salvo por una singularidad en cierto $z = s$, puede que ya no integre cero, pero todo vuelve a funcionar cambiando $f(z)$ por $f(z) - r/(z - s)$ donde $r = \operatorname{Res}(f, s)$ es lo que se llama el *residuo* de f en s. Se prueba que esta función tiene una primitiva (a pesar de la posible singularidad el campo vuelve a ser conservativo).

Hay muchos libros en los que aprender los rudimentos de la variable compleja. Un clásico, escrito por el primer o segundo medallista Fields, es [Ahl78]. Más clásica aún es una famosa carta de Gauss de 1811 al astrónomo F. Bessel (reproducida en [Koc91, §8]).

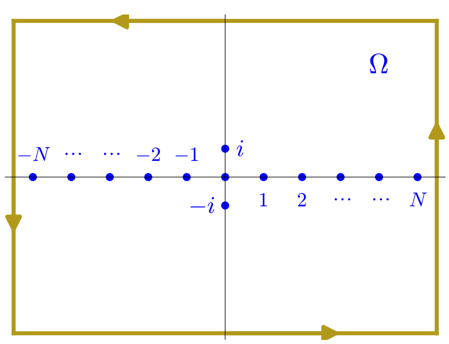
El teorema de los residuos es un resultado maravilloso que permite expresar una integral como una suma, lo cual puede ser útil tanto para hallar integrales como para calcular sumas.

Teorema 1.2.9 (Teorema de los residuos)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región compacta y simplemente conexa cuya frontera viene dada por una curva rectificable γ orientada positivamente (en contra de las agujas del reloj). Sea f una función holomorfa en Ω salvo por un número finito de singularidades en $z = s_1, s_2, \dots, s_N$ en el interior de Ω, entonces*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}(f, s_n)$$

donde $\operatorname{Res}(f, s_n)$ *es el residuo de f en $z = s_n$.*

La función $g(z) = \pi/\operatorname{sen}(\pi z)$ tiene polos en $n \in \mathbb{Z}$ y $\operatorname{Res}(g, n) = (-1)^n$, por ello es una buena máquina sumadora de series alternantes. Tomemos por ejemplo $\Omega = \big\{z : |\Re(z)| < N + \frac{1}{2},\ |\Im(z)| < N + \frac{1}{2}\big\}$ con $N \in \mathbb{Z}^+$ y $f(z) = (z^2+1)^{-1} g(z)$. Las singularidades son polos simples en $z = \pm i$ y en todos los enteros de $[-N, N]$. Los residuos son:



$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi i)} \lim_{z \to i} \frac{z - i}{z^2 + 1} = \frac{\pi}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{-\pi}{\operatorname{sen}(\pi i)} \lim_{z \to -i} \frac{z + i}{z^2 + 1} = \frac{\pi}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$$

$$\operatorname{Res}(f, n) = \frac{\operatorname{Res}(\pi/\operatorname{sen}(\pi z), n)}{n^2 + 1} = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

$$\text{entonces } \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f = \frac{2\pi}{e^{-\pi} - e^{\pi}} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

Si $N \to \infty$, f en la frontera de Ω es $O\big(N^{-2}\big)$ y por tanto $\int_\gamma f(z)\, dz = O\big(N^{-1}\big)$. en el límite se tiene la evaluación limpia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$

Otra joya, menos básica, de la variable compleja es la teoría de *funciones de orden finito* desarrollada por J. Hadamard (y empleada en las primeras demostraciones del teorema de los números primos) que tiene sus orígenes en un argumento dudoso de Euler.

Lo que hizo Euler esencialmente es notar que para cualquier polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_0 \neq 0$, la suma de los cuadrados de los inversos de sus ceros es $(a_1^2 - 2a_0a_2)/a_0^2$ (esto es un ejercicio asequible), entonces pensando que $x^{-1}\operatorname{sen} x = 1 - x^2/3! + x^4/5! - \ldots$ es un "polinomio infinito" con ceros $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, se tendría

$$\frac{(-2)\cdot 1\cdot(-1/3!)}{1^2} = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(n\pi)^2} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La fórmula final es cierta pero el razonamiento es muy dudoso. Euler llegó a probar que $x^{-1}\operatorname{sen} x = \prod_{n=1}^{\infty}\big(1 - x^2/(n\pi)^2\big)$, es decir que factoriza como un polinomio, y esta factorización es suficiente para dar un argumento válido. Hadamard demostró que todas las *funciones enteras* (holomorfas en todo $\mathbb{C}$) de orden $\lambda < \infty$, es decir, satisfaciendo $f(z) = O\big(e^{C|z|^\lambda}\big)$ para cierta constante C, se factorizan en términos de sus ceros como un polinomio salvo un factor exponencial y salvo correcciones de la convergencia. Concretamente, si denotamos los ceros mediante z_n y llamamos k_0 al orden del posible cero en $z = 0$, se tiene

$$f(z) = z^{k_0} e^{g(z)} \prod_n \big(1 - \frac{z}{z_n}\big) e^{z/z_n + \frac{1}{2}(z/z_n)^2 + \cdots + \frac{1}{[\lambda]}(z/z_n)^{[\lambda]}} \tag{1.20}$$

donde $g(z)$ es un polinomio de grado a lo más $[\lambda]$. El único propósito de las exponenciales en el producto es asegurar la convergencia. Si no se ha elegido λ óptimo o si hay simetrías especiales, se pueden agrupar en parte con $g(z)$ o simplificar. Por ejemplo, para $f(z) = \operatorname{sen} z$, $\lambda = 1$ y se deduce

$$\operatorname{sen} z = z e^{a+bz} \prod_{n\neq 0} \big(1 - \frac{z}{\pi n}\big) e^{z/(n\pi)} \qquad \text{que implica} \qquad \operatorname{sen} z = z e^{a+bz} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\big).$$

Usando que $z^{-1}\operatorname{sen} z$ es par y que tiene límite 1 cuando $z \to 0$ se deduce $a = b = 0$, es decir, el producto hallado por Euler. Eligiendo $z = \pi/2$ se tiene la curiosa *fórmula de Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots}. \tag{1.21}$$

La *extensión analítica* es una estrategia que permite sumar cosas que no se pueden sumar. ¿Y para qué deseamos hacer tal cosa? Por ejemplo para aplicar el teorema de los residuos en regiones más amplias. La clave es el teorema de unicidad, que asegura que si dos funciones holomorfas en una región conexa coinciden en un conjunto con un punto de acumulación, entonces coinciden en todos los puntos. Si hay una extensión holomorfa tiene que ser única, lo cual da una manera unívoca de interpretar algunas series divergentes.

Una de las extensiones analíticas más conocidas y fructíferas es la de una función fundamental para estudiar la distribución de los primos, la *función ζ de Riemann*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{para} \qquad \Re(s) > 1. \tag{1.22}$$

Series como $\sum n^{-1/2}$ o $\sum n^{-3/4+i}$ no convergen (para la segunda se puede usar que n^i apenas oscila en intervalos diádicos) lo que sugiere que es imposible dar sentido a $\zeta(1/2)$ o a $\zeta(3/4-i)$. Sin embargo, por (1.18) (Proposición 1.2.8 para $K=1$) con $f(x) = x^{-s}$,

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1}\, dx \tag{1.23}$$

y como $\{x\}$ está acotado, la integral converge si $\Re(s) > 0$. Se deduce entonces que $\zeta(s) - 1/(s-1)$ se extiende a una función holomorfa en todo el semiplano derecho. Aplicando la Proposición 1.2.8 en general (integrando (1.23) por partes con cierto cuidado), x^{-s-1} pasa a ser x^{-s-K} y como K es arbitrario, la conclusión es que $\zeta(s)$ tiene una extensión analítica (holomorfa) a todo $\mathbb{C}$ salvo por un polo simple de residuo 1 en $s=1$. De alguna forma estamos dando sentido a $\sum n^{-s}$ siempre que $s \neq 1$. Pensemos ahora en la fórmula elemental

$$\big(1 - 2^{1-s}\big)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

que da sentido a $\zeta(s)$ en $\Re(s) > 0$, siempre que $2^{1-s} \neq 1$. Por la unicidad de la extensión analítica, esta fórmula debe definir por ejemplo $\zeta(1/2)$, formalmente $\sum n^{-1/2}$, de manera compatible con (1.23). A partir de ahora llamaremos función ζ a la única extensión analítica de (1.22).

Otro ejemplo destacable de extensión analítica es la de la *función* Γ dada por

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx \qquad \text{para } \Re(s) > 0. \tag{1.24}$$

En cierto modo, Γ generaliza los factoriales para valores complejos porque es fácil probar la ecuación funcional $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ y $\Gamma(1) = 1$, de donde $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Esta ecuación funcional, en la forma $\Gamma(s-1) = \Gamma(s)/(s-1)$ muestra que $\Gamma(s)$ tiene una extensión analítica a $\mathbb{C} - (\mathbb{Z}^- \cup \{0\})$. Además en cada entero no positivo hay un polo simple. Para un estudio más profundo de la función Γ se necesita una ecuación funcional menos obvia dada por

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)} \qquad \text{para } s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}. \tag{1.25}$$

Inmediatamente, esta relación da una extensión analítica de $\Gamma(s)$ que debe ser coherente con la anterior. Se deduce también que no tiene ceros y por consiguiente $F(s) = 1/\Gamma(s)$ se extiende a una función entera. A partir de (1.24) se tiene que $\Gamma(s) = O\big(e^{|s|^\lambda}\big)$ en $\Re(s) \geq 1/2$ para todo $\lambda > 1$. De (1.25) se deduce que esta misma acotación es válida para $F(s)$ en $\Re(s) \leq 1/2$ y la primera forma de la ecuación funcional extiende la cota a todo $s \in \mathbb{C}$. Los ceros de F están en los enteros negativos y según (1.20), tenemos (entendiendo $1/\infty = 0$)

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{s}{n}\big) e^{-s/n} \qquad \text{para } s \in \mathbb{C}, \tag{1.26}$$

donde γ es una constante, la constante de Euler. Aunque su definición habitual es el límite de $\sum_{n=1}^{N} n^{-1} - \log N$, se puede redefinir como $\Gamma'(1)$. Para probar (1.25), expresamos el primer miembro como una sola integral para $0 < \Re(s) < 1$.

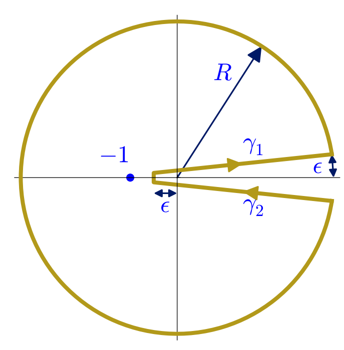
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \int_0^\infty (x/y)^s x^{-1} e^{-x-y}\, dydx \overset{y=xt}{=} \int_0^\infty \frac{t^{-s}}{t+1}\, dt.$$

Ahora vamos a calcular este integral mediante el teorema de los residuos. Tomamos $f(z) = z^{-s}/(z+1)$ donde z^{-s} se define como $e^{-s\log z}$ pero esto da un problema porque $\log z$ es multivaluada, si nos aferramos a $\log z = \log|z| + i\arg(z)$ entonces $\log(a+\epsilon i) - \log(a-\epsilon i) = 2\pi i$ si $\epsilon \to 0^+$ y $a \in \mathbb{R}^+$. Por ello escogemos para llegar a cabo la integración, un dominio de tipo *pacman* que evita el eje real positivo:

$$\operatorname{Res}(f, -1) = e^{\pi i s}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_1} f = \int_0^\infty \frac{t^{-s}}{t+1}\, dt$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_2} f = -e^{-2\pi i s} \int_0^\infty \frac{t^{-s}}{t+1}\, dt$$



Cuando $R \to \infty$ la contribución de la parte circular de la frontera tiende a cero y el teorema de los residuos nos da para $\epsilon \to 0^+$ que la integral que queremos evaluar es $2\pi i e^{-\pi i s}/(1 - e^{-2\pi i s})$, que coincide con el segundo miembro de (1.25).

Tomando logaritmos en (1.26) y empleando la Proposición 1.2.8 con $K = 2$ para estimar la parte significativa de la suma infinita, se deduce con algún esfuerzo la *fórmula de Stirling*

$$\log \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \log s - s + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\big(|s|^{-1}\big) \qquad \text{para } |\arg(s)| < \pi - \epsilon, \tag{1.27}$$

En realidad este esquema no da directamente el valor explícito de la constante $\frac{1}{2}\log(2\pi)$, que se puede evaluar empleando que (1.21) proporciona la asintótica de $\Gamma(2n)/\Gamma^2(n)$ (cf. [Spi84, 711–713]). Hay una prueba completa en [Ahl78, §5.2.5] y otra elemental para $x \in \mathbb{R}^+$ en [Mic08].

Para terminar veamos que $\zeta(s)$ también satisface una ecuación funcional.

Proposición 1.2.10. *La función ζ verifica la ecuación funcional*

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

Además si multiplicamos ambos miembros por $s(s-1)$ el resultado es una función entera.

Demostración. Seguimos aquí la prueba de la famosa memoria de B. Riemann, que con un sencillo cambio de variable en (1.24) parte de

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-\pi n^2 t}\, dt \qquad \text{para} \quad \Re s > 1,$$

o equivalentemente, con la notación de (1.16)

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{s/2-1}\big(\theta(it/2) - 1\big)\, dt.$$

Separando el rango de integración en $[0,1] \cup [1,\infty)$ y utilizando la Proposición 1.2.5, el segundo miembro es

$$\frac{1}{2}\int_0^{1} t^{s/2-1}\big(t^{-1/2}\theta(i/2t) - 1\big)\, dt + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} t^{s/2-1}\big(\theta(it/2) - 1\big)\, dt.$$

Con el cambio $t \mapsto 1/t$ en la primera integral se llega a que para $\Re s > 1$

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} (t^{s/2-1} + t^{-1/2-s/2})\big(\theta(it/2) - 1\big)\, dt.$$

Al multiplicar por $s(s-1)$ el segundo miembro es una función entera e invariante por $s \mapsto 1-s$. Por la unicidad de la extensión analítica, el primer miembro debe tener también tal invariancia. $\square$

La importancia de esta prueba radica en que se puede "copiar" para demostrar que las funciones ζ que provienen de formas modulares satisfacen una ecuación funcional.