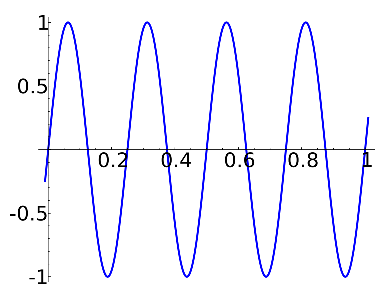
Capítulo 1

Introducción

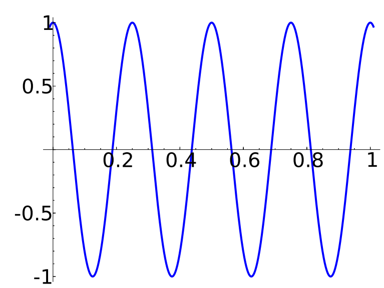
1.1. Precalentamiento

El término *análisis* deriva de una palabra griega que significa descomposición (y entre otras cosas, ¡incluso muerte!) y es éste sentido etimológico, excluyendo el paréntesis, el que vamos a manejar en el curso, más que el otro significado común en Matemáticas de algo con derivadas e integrales.

El *análisis armónico* se ocupa, a grandes rasgos, de la descomposición de funciones en *tonos puros* que llamaremos *armónicos*. Sin rigor, consideramos tonos puros a ciertos objetos que nos recuerdan a las funciones $\operatorname{sen}(2\pi nx)$ y $\cos(2\pi nx)$ con $n \in \mathbb{Z}$, las cuales aparecen en los desarrollos de Fourier clásicos.



$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \operatorname{sen}(6\pi\mathsf{x})$



$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \cos(6\pi\mathsf{x})$

En términos acústicos, en el rango de frecuencias audibles estas funciones suenan como mantener uno de los pitidos de la alarma de un reloj electrónico o una nota de una flauta.

Con esta ambigüedad, el análisis armónico se convierte en un área muy amplia cuyas fronteras son muy subjetivas y están sujetas a qué deseemos denominar armónicos. Incluso con toda esta amplitud no se cubren muchos temas actuales importantes en los que los armónicos aparecen más como motivación que como ingredientes.

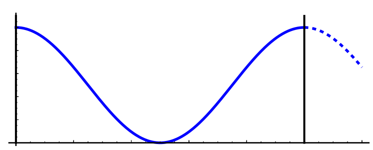
1.1.1. La serie de Fourier original

El punto de partida del análisis armónico fue el *desarrollo en serie de Fourier*. Afirma que cualquier función 1-periódica razonable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se puede analizar como

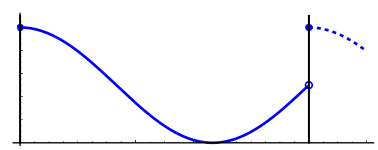
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nx) \qquad \text{con} \qquad a_n = \int_0^1 f(x) e(-nx)\, dx \tag{1.1}$$

donde se ha empleado la notación sintética $e(x) = e^{2\pi i x}$ para englobar los senos y cosenos que representan los tonos puros. A los a_n se les llama *coeficientes de Fourier*. Las funciones $\{e(nx)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ son los armónicos en esta descomposición.

Por la periodicidad, el intervalo de integración $[0, 1]$ se puede sustituir por cualquier otro de longitud 1. A este respecto, en muchos contextos se muestra conveniente introducir el *toro* $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\{x \mapsto x + 1\}$ obtenido al enrollar la recta real alrededor de la circunferencia unidad (un toro unidimensional es una circunferencia), o equivalentemente pegar los extremos del intervalo $[0, 1]$. En este sentido, $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ representa una función 1-periódica y a_n viene dado por la integral sobre $\mathbb{T}$. No hay que dejarse impresionar por toda esta palabrería, simplemente considerarla como una notación conveniente o una taquigrafía. Por ejemplo $C(\mathbb{T})$ y $C^n(\mathbb{T})$ representan las funciones continuas y las funciones de clase C^n que son 1-periódicas.



$\mathsf{f} \in \mathsf{C}(\mathbb{T})$



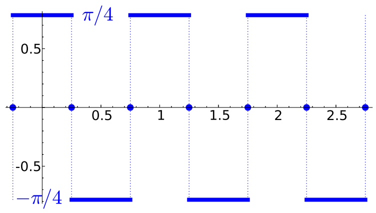
$\mathsf{f} \notin \mathsf{C}(\mathbb{T})$

Los matemáticos desafortunadamente demasiado a menudo son muy reacios a hablar de un resultado antes de enunciarlo con rigor y generalidad. En el caso del desarrollo en serie de Fourier, es difícil traducir "cualquier función 1-periódica razonable" en la clase más amplia de funciones para las que se cumple (1.1). El problema es tan complejo y con tantas ramificaciones que en muchas exposiciones desvía la atención del problema realmente natural: incluso suponiendo que partimos de una función 1-periódica muy regular ¿por qué tiene que ser superposición de senos y cosenos? ¿Por qué podemos, teóricamente, imitar el sonido de cualquier instrumento musical tocando muchas flautas al mismo tiempo? Ésta es la pregunta candente, nunca mejor dicho, en la famosa memoria de 1822 de J. Fourier sobre la teoría analítica del calor [Fou88] y que de ningún modo es obvia, de hecho destacados matemáticos de los siglos XVIII y XIX manifestaron opiniones en ambos sentidos.

La primera serie de Fourier que aparece en su famosa memoria es:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\big((2n+1)x\big) \qquad \text{para} \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \tag{1.2}$$

Fourier nota que en $[\pi/2, 3\pi/2]$, el resto del intervalo hasta completar un periodo, el resultado es $-\pi/4$ por las simetrías del coseno, salvo en los extremos donde la función vale cero. Con la notación de (1.1), escribiríamos esto como

$\dots$ 

$$\dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} e\big((2n+1)x\big) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Los argumentos de Fourier son muy objetables desde el rigor actual, e incluso con el de su tiempo. Su razonamiento [Fou88, Ch.III, Sec.II.171] para "probar" (1.2) fue suponer $\pi/4 = \sum a_n \cos\big((2n+1)x\big)$ e igualar las series de Taylor de ambos miembros en $x = 0$. Con ello se llega a un sistema lineal con infinitas incógnitas, los a_n, y coeficientes tendiendo a infinito que Fourier "resuelve" para obtener $a_n = (-1)^n/(2n+1)$, incluso a pesar de que todas las ecuaciones del sistema menos una dan lugar a series divergentes al comprobar las soluciones. La prueba rigurosa de la convergencia de la series de Fourier bajo condiciones bastante generales tendría que esperar a un famoso trabajo de P.G.L. Dirichlet en 1828.

Después de este desvío histórico, volvamos al problema de por qué nos deberíamos creer que las funciones 1-periódicas razonables coinciden con su serie de Fourier. Comencemos considerando la *delta de Dirac 1-periódica* (también llamada *peine de Dirac*)

$$\delta_P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \tag{1.3}$$

donde δ es la *delta de Dirac* habitual. Esta notación, introducida por P.A.M. Dirac en su matematización de la física cuántica, representa algo que los físicos dicen que es una función que satisface $\int_{\mathbb{R}} \delta = 1$ y $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$, mientras que los matemáticos prefieren negarle la categoría de función y decir que es una distribución o una sucesión de funciones $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, que llaman *aproximacion de la identidad*, tal que $\int_{\mathbb{R}} \phi_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) f(x)\, dx = f(0)$. Aquí f es una *función test* típicamente C_0^∞. La función δ_P tiene la misma propiedad reemplazando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{T}$. Podemos imaginar estos objetos como la función de densidad correspondiente a una partícula unidad localizada en el origen. La masa total es 1 pero no hay nada fuera del origen, $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $\delta(0) = \infty$, con un infinito tan grande que la integral de δ es 1 en cualquier intervalo que contenga al origen.

Si δ_P coincidiera con su serie de Fourier, es decir, si la igualdad

$$\boxed{\delta_P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nx)} \tag{1.4}$$

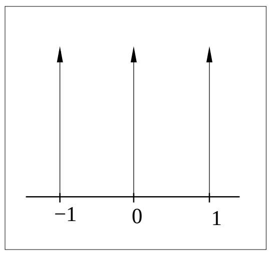
tuviera sentido, entonces formalmente

$$f(x) = \int_{\mathbb{T}} \delta_P(t) f(x-t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} f(x-t)e(nt)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nx) \int_{\mathbb{T}} f(u)e(-nu)\,du$$

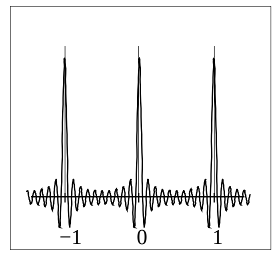
donde se ha usado el cambio de variable $t = x - u$, y esto es (1.1).

En definitiva, si nos creemos el desarrollo de Fourier de la delta de Dirac periódica, deberíamos creernos en una línea el de las funciones razonables. ¿Por qué albergamos alguna esperanza en hacer riguroso este argumento fantasmagórico? Simplemente porque al truncar el segundo miembro de (1.4) se obtienen cosas que nos recuerdan al primer miembro:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) =$$



$$\sum_{n=-10}^{10} e(nx) =$$



Pasar de funciones 1-periódicas a T-periódicas es tan fácil como hacer el cambio $x \mapsto x/T$, con ello el desarrollo de Fourier de funciones razonables T-periódicas responde a la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e\big(n\frac{x}{T}\big) \qquad \text{con} \qquad a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e\big(-n\frac{x}{T}\big)\,dx \tag{1.5}$$

donde el $1/T$ proviene del diferencial. Si permitimos $T \to \infty$ manteniendo $\xi = n/T$ fijo, los coeficientes a_n vendrán dados por la *transformada de Fourier*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-\xi x)\,dx. \tag{1.6}$$

Por otra parte, imponer que algo tenga periodo infinito es como no imponer nada porque $x + \infty = \infty$, además la suma en (1.5) se puede ver como una suma de Riemann. Con estas ideas, nos arriesgamos a establecer, como hizo Fourier en el capítulo IX de su memoria, una suerte de análogo en $\mathbb{R}$ de las series de Fourier, al que se le llama *fórmula de inversión*:

$$\big(\widehat{f}\big)^{\smile} = f \qquad \text{donde} \qquad \breve{g}\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e(x\xi)\,d\xi. \tag{1.7}$$

A $\breve{g}$ se le llama *transformada inversa (o antitransformada) de Fourier* de g. Nótese en la analogía con (1.1) una vez que se descodifica la notación. La fórmula de inversión es

$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e(x\xi)\,d\xi$ y estamos expresando f como una superposición de armónicos $\{e(\xi x)\}_{\xi\in\mathbb{R}}$ cuya naturaleza no discreta motiva integrar más que sumar al analizar f.

De nuevo surge la pregunta de por qué esto es cierto para "funciones razonables", ahora mitigada por la deducción anterior. La respuesta análoga a (1.4) es la enigmática fórmula que raramente aparecerá en un libro de análisis matemático:

$$\boxed{\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e(x\xi)\,d\xi}. \tag{1.8}$$

Si aceptamos esta fórmula en la que integramos una función no integrable. (1.7) se sigue de un Fubini sospechoso:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e(-\xi t)\,dt\Big)e(\xi x)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-\infty}^{\infty} e\big((x-t)\xi\big)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(x-t)\,dt$$

que coincide con $f(x)$.

1.1.2. Algunos teoremas

Para hacer rigurosa la demostración anterior de (1.1), definimos el sumatorio truncado y la operación integral empleada en la idea intuitiva:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e(nx) \qquad \text{y} \qquad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t)dt.$$

A D_N se le llama *núcleo de Dirichlet* y a $f*g$ *convolución de* f *y* g. Se puede definir análogamente en $\mathbb{R}$ y en ambos casos es conmutativa y asociativa.

Si procedemos como antes pero reemplazando la suma formal $\sum e(nx)$ por $D_N(x)$, obtendremos una fórmula para las sumas parciales de la serie de Fourier, que denotaremos por S_Nf,

$$S_Nf(x) = \sum_{|n|\le N} a_n e(nx) = (D_N * f)(x).$$

La idea es que δ_P es formalmente la identidad para la convolución, $\delta_P * g = g$, y si en algún sentido $D_N \to \delta_P$, la fórmula anterior debería dar (1.1). Para buscar sentido a $D_N \to \delta_P$, usamos el viejo truco de poner y quitar, empleando que $\int_{\mathbb{T}} D_N = 1$,

$$(D_N * f)(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t)D_N(t)\,dt = f(x) + \int_{\mathbb{T}} \big(f(x-t) - f(x)\big)D_N(t)\,dt.$$

Si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces $f(x-t) \to f(x)$ uniformemente cuando $t \to 0$. Si la función D_N estuviera bastante concentrado en el origen y $\lim \int_{\mathbb{T}} |D_N| < \infty$, tendríamos (1.1) para funciones continuas. Sin embargo $\int_{\mathbb{T}} |D_N|$ se comporta como $\log N$ y la última condición no es cierta. Las cosas son más tangibles de lo que parecen puesto que sumando una progresión geométrica tenemos la expresión explícita

(1.9)
$$D_N(x) = \frac{\operatorname{sen}\big(2\pi(N+1/2)x\big)}{\operatorname{sen}(\pi x)} \quad \text{para } x \notin \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad D_N(x) = 2N+1 \quad \text{para } x \in \mathbb{Z}.$$

El *Lema de Riemann-Lebesgue* asegura que para cualquier función integrable g, se cumple $\int_{\mathbb{T}} g(x)e(\lambda x)\,dx = 0$ si $\lambda \to \infty$. Por tanto, si para cierto x, $\big(f(x-t)-f(x)\big)/\operatorname{sen}(\pi t)$ es integrable como función de t, deducimos que $S_N f(x) \to f(x)$, como deseábamos (habitualmente se llama a este resultado *criterio de Dini*). Si exigimos $f \in C^1(\mathbb{T})$, entonces nuestra hipótesis será satisfecha en todo punto, y hemos probado:

Teorema 1.1.1. *Para cualquier $f \in C^1(\mathbb{T})$ se cumple* $\lim_{N\to\infty} S_N f = f$ *uniformemente.*

Empleando que el núcleo de Dirichlet es perfectamente simétrico, especialmente que $\int_0^{1/2} D_N = \int_{-1/2}^{0} D_N = 1/2$, se pueden permitir discontinuidades de salto, siempre que haya regularidad a derecha e izquierda, y la serie de Fourier tenderá al punto medio. Esta observación y el hecho de que la *funciones de variación acotada* sean esencialmente las de derivada integrable (permitiendo así usar el criterio de Dini), sugieren que el resultado más general al que podemos llegar con los razonamientos anteriores es [Kat76, II.2]

Teorema 1.1.2. *Si f es de variación acotada en $\mathbb{T}$, se cumple* $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x^-)+f(x^+)\big)$.

Antes hemos dejado caer que el problema de la convergencia de la serie de Fourier sería más simple si la integral $\int_{\mathbb{T}} |D_N|$ estuviera uniformemente acotada en N. Con esta idea, se introduce el *núcleo de Fejér*

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \big(1-\frac{|n|}{N}\big)e(nx) = \frac{\operatorname{sen}^2(\pi N x)}{N\operatorname{sen}^2(\pi x)},$$

que al ser positivo cumple $\int_{\mathbb{T}} |F_N| = \int_{\mathbb{T}} F_N = 1$. Entonces el argumento anterior, cambiando D_N por F_N, nos da que las *sumas de Cesàro* de la serie de Fourier, es decir

$$\widetilde{S}_N f = \sum_{|n|<N} a_n \big(1-\frac{|n|}{N}\big)e(nx),$$

constituyen la forma de sumar correcta al desarrollar por Fourier funciones continuas. Éste es un resultado bien conocido de L. Fejér. Exagerando un poco, el hecho de que queramos seguir sumando de la manera habitual es una manía matemática que no tiene demasiado reflejo en el plano práctico. Ya L. Euler, el gran artista de la sumación, inventó métodos para acelerar series porque tenía que calcular sumas sin ordenador.

Considerar $\widetilde{S}_N f$ en vez de $S_N f$ es una forma de aceleración de series en sentido fuerte (véanse las gráficas de la siguiente sección) puesto que incluso hace que algunas series de Fourier divergentes dejen de serlo, permitiendo sustituir “razonable” por “continua” en la frase que introduce (1.1).

Teorema 1.1.3 (de Fejér)**.** *Para cualquier* $f \in C(\mathbb{T})$ *se cumple* $\lim_{N\to\infty} \widetilde{S}_N f = f$ *uniformemente.*

De hecho, incluso si f tiene discontinuidades de salto, la convergencia sigue siendo uniforme en cualquier compacto que no las incluya y en las discontinuidades $\widetilde{S}_N f$ tiende al punto medio, como antes [Zyg77, III.3].

Supongamos que tenemos una función $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, entonces integrando por partes, sus coeficientes de Fourier decaen muy rápido y la convergencia de la serie de Fourier es absoluta y uniforme. Con ello no tendremos ningún reparo en elevar al cuadrado en (1.1) e integrar sobre $\mathbb{T}$. El resultado es la bella *identidad de Parseval* (también llamada *identidad de Plancherel*)

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2. \tag{1.10}$$

Toda la magia ha venido de que $\int_{\mathbb{T}} e(-mx)e(nx)\ dx = 0$ si $n \neq m$ y es 1 si $n = m$. Dicho de manera pedante pero útil, $\{e(nx)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una familia ortonormal con el producto escalar $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} \bar{f}g$ que es el de $L^2(\mathbb{T})$, las funciones de cuadrado integrable. Ahora bien, C^∞ es denso en L^2 y entonces (1.10) tiene perfecto sentido para $f \in L^2$ independientemente de que su serie de Fourier converja. De (1.10) se sigue $\|f - S_N f\|_2^2 = \sum_{|n|>N} |a_n|^2$ con $\|\cdot\|_2$ la norma en L^2, esto es, $\|f\|_2 = \big(\int |f|^2\big)^{1/2}$. Con todo ello, las series de Fourier convergen siempre, si aceptamos vivir en el mundo L^2 que es completo (podemos tomar límites sin salir de él) y mucho más amplio que las funciones continuas.

Teorema 1.1.4. *Para cualquier* $f \in L^2(\mathbb{T})$ *se cumple* $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N f\|_2 = 0$.

Por su estructura de espacio de Hilbert (espacio completo con producto escalar), L^2 tiene un regusto de álgebra lineal que nos familiariza con las series de Fourier. Así $S_N f$ es el resultado de proyectar f en el espacio de dimensión finita $\{e(nx)\}_{n=-N}^{N}$. Desde otro punto de vista, los coeficientes de Fourier vienen del ajuste de mínimos cuadrados al minimizar la varianza. En suma, los polinomios trigonométricos son álgebra lineal pura y en el límite tenemos las series de Fourier.

Por polarización o por un cálculo directo obtenemos una identidad de Parseval (1.10) para el producto escalar que resulta ser dual en cierto modo de otra que da los coeficientes de Fourier de una convolución.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n b_n = \int_{\mathbb{T}} \bar{f} g \qquad \text{y} \qquad c_n = a_n b_n, \tag{1.11}$$

donde $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son los coeficientes de Fourier de f, g y $f * g$.

La teoría L^2 es maravillosa pero no debemos olvidarnos de que con respecto al problema original, lo que hemos hecho es cambiar la definición. Ahora la igualdad de (1.1) hay que entenderla en sentido de que el momento de orden 2 de la diferencia (la varianza) es cero. La pregunta matemática natural es si todavía tenemos convergencia en el sentido habitual. Por supuesto, las funciones de L^2 están definidas salvo conjuntos de medida cero, entonces necesariamente nos tendremos que olvidar de ellos. Una respuesta afirmativa la dio L. Carleson en 1966 [Car66]. Su teorema, muy difícil de probar, es uno de los hitos del análisis armónico:

Teorema 1.1.5 (de Carleson)**.** *Para cualquier $f \in L^2(\mathbb{T})$ se cumple*

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x) \qquad \textit{para casi todo } x.$$

Este teorema fue extendido por R. Hunt a $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 < p < \infty$. M. Lacey y C. Thiele dieron en 2000 una prueba mucho más sencilla que la original [LT00].

Respecto a la falta de convergencia, con algunas manipulaciones con series lacunares, se construye [Kat76, II.2] [Kör88, §15] una función continua cuya serie de Fourier no converge en un punto. También es posible conseguir que la convergencia falle en infinitos puntos. De hecho hasta se puede tomar un conjunto denso (este ejemplo es muy antiguo, data de 1873 y se debe a P. du Bois-Reymond), además un resultado de J.-P. Kahane y Y. Katznelson [KK66] asegura que para conjunto de medida cero $E \subset \mathbb{T}$ existe una función continua tal que su serie de Fourier diverge en E. Por otro lado A. Kolmogorov, demostró que existían funciones integrables, esto es, en $L^1(\mathbb{T})$, tales que su serie de Fourier diverge en todo punto. Nótese que ser integrable es lo mínimo que se puede pedir para que tenga sentido calcular los coeficientes de Fourier.

Respecto a la transformada de Fourier, la teoría es más o menos paralela. Una diferencia esencial es que para la propia definición se necesita cierto decaimiento. Esto es notorio cuando intentamos hacer la teoría L^2. Si bien se tenía $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, ahora por la no compacidad de $\mathbb{R}$ nos enfrentamos a $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ y no podremos llevar a cabo la integración en (1.6) en general. La solución es usar algún tipo de regularización [DM72, Ch.2]. Una vez abierta la veda de la regularización, es posible dar sentido a (1.7) para cualquier función de L^1. Dentro de la teoría L^2 se vuelve a tener la identidad de Parseval y la relación con la convolución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f} g = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}\,\widehat{g} \qquad \text{y} \qquad (f * g)^{\wedge} = \widehat{f}\,\widehat{g}. \tag{1.12}$$

A efectos más teóricos que prácticos, cabe preguntarse si hay alguna clase sencilla y amplia de funciones en la que podamos tomar transformadas y antitransformadas en el sentido estricto de la definición, sin regularizaciones. La respuesta son las funciones C^∞ con decaimiento rápido o *clase de Schwartz*, en la que todas las derivadas decaen más rápido que el inverso de un polinomio. Esta clase desempeña un papel fundamental en la teoría de distribuciones de L. Schwartz que, entre otras cosas, permite que los matemáticos escriban deltas de Dirac sin sufrir escalofríos.

La invariancia de la clase de Schwartz proviene de la relación entre $\widehat{f}$ y $\widehat{f^{(k)}}$ que se sigue fácilmente integrando por partes y tiene su análogo también en series de Fourier:

$$a_n = (2\pi i n)^{-k} \int_{\mathbb{T}} f^{(k)}(x) e(-nx)\, dx \qquad \text{y} \qquad \widehat{f}(\xi) = (2\pi i \xi)^{-k} \widehat{f^{(k)}}(\xi) \tag{1.13}$$

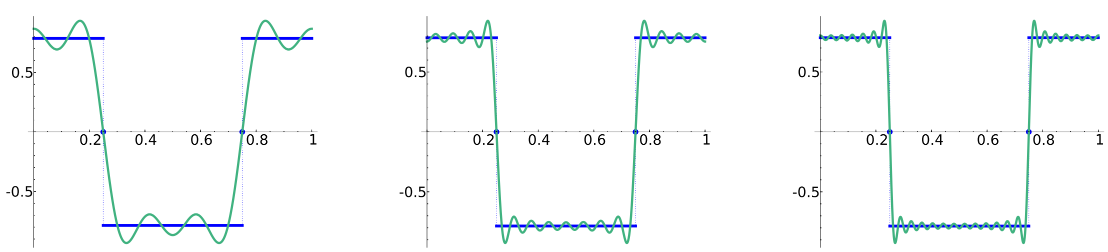
para n y ξ no nulos.

1.1.3. Algunos ejemplos y gráficos

El Teorema 1.1.2 asegura que tenemos la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} e\big((2n+1)x\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\big(2\pi(2n+1)x\big)$$

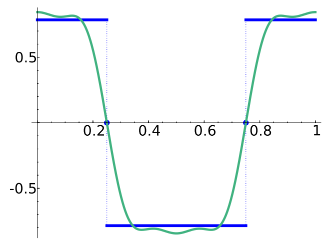
donde f es la función 1-periódica de onda rectangular considerada por Fourier (escalada), que en $[-1/2, 1/2]$ vale $\pi/4$ si $|x| < 1/4$, $-\pi/4$ si $|x| > 1/4$ y $f(-1/4) = f(1/4) = 0$. La convergencia en la primera serie hay que entenderla, según hemos visto, como límite de $\sum_{n=-N}^{N}$. Las siguientes gráficas muestran que las cosas funcionan como cabría esperar, tomando valores de N cada vez mayores.



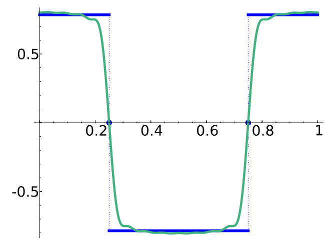
$S_5 f$ $\qquad$ $S_{15} f$ $\qquad$ $S_{25} f$

Veremos más adelante que ese primer pico que aparece a ambos lados de las discontinuidades curiosamente no disminuye su tamaño por muy grande que tomemos N.

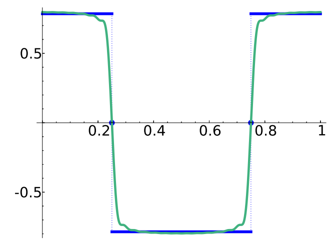
Las siguientes gráficas permiten comparar lo que se consigue sumando a la manera de Fejér tomando el mismo número de sumandos (realmente uno menos, porque en $\widetilde{S}_N f$ el coeficiente $a_{\pm N}$ está multiplicado por cero). La velocidad de convergencia ha mejorado notablemente aunque, por supuesto, no puede ser uniforme porque la función límite es discontinua.



$\widetilde{S}_5 f$



$\widetilde{S}_{15} f$



$\widetilde{S}_{25} f$

Ahora vamos a jugar un poco con esta serie de Fourier. Por definición, f^2 es constante $\pi^2/16$ en casi todo punto y por tanto (1.10) es muy sencillo de aplicar y conduce inmediatamente a

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4(2n+1)^2} \qquad \text{que equivale a} \qquad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Si calculamos $f * f$, la convolución de f consigo misma, se obtiene la función 1-periódica diente de sierra que en $[-1/2, 1/2]$ vale $\pi^2(1-4|x|)/16$, la cual es continua y C^1 a trozos. De modo que por la segunda fórmula de (1.11) se tiene la igualdad (con convergencia uniforme)

$$\frac{\pi^2}{16}(1-4|x|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e\big((2n+1)x\big)}{4(2n+1)^2} \qquad \text{para } -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}.$$

Lo cual es coherente con el cálculo directo de los coeficientes de Fourier. Aplicando la primera fórmula de (1.11) a esta función y la original, y utilizando (1.10), se obtiene las sumas de otras dos bellas series:

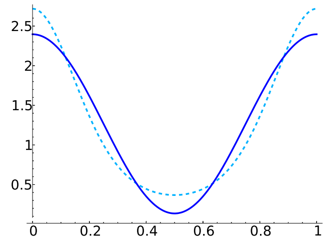
$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

En los libros de análisis armónico, a menudo se muestran gráficas como las primeras que hemos visto y se hace poco hincapié en lo espectacularmente bien que aproximan las sumas parciales $S_N f$ cuando la función es suficientemente regular.

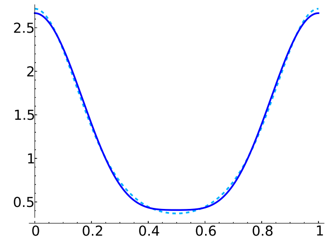
Consideremos por ejemplo la función 1-periódica $f(x) = e^{\cos(2\pi x)}$. Con ayuda de un programa o de un paquete matemático, podemos aproximar sus primeros coeficientes de Fourier. Por la simetría, $a_n = a_{-n}$ y no hace falta calcular los de índice negativo.

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1{,}266065877 & a_1 = 0{,}565159103 & a_2 = 0{,}135747669 & a_3 = 0{,}022168424 \\ a_4 = 0{,}002737120 & a_5 = 0{,}000271463 & a_6 = 2{,}24886 \cdot 10^{-5} & a_7 = 1{,}59921 \cdot 10^{-6} \end{array}$$

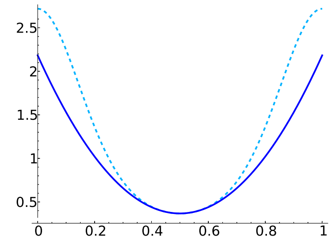
La aproximación es notoria usando muy pocos coeficientes de Fourier. En las figuras siguientes se muestra con línea de puntos la gráfica de f. En la segunda, sólo con a_0, a_1 y a_2 se consigue una aproximación poco distinguible a simple vista. En la tercera figura se muestra la pobreza en términos globales del polinomio de Taylor de grado 2 en el punto medio.



f aproximada por $S_1 f$



f aproximada por $S_2 f$

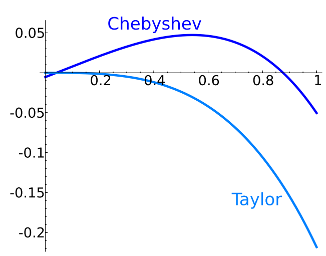


f aproximada por $T_{2,0,5} f$

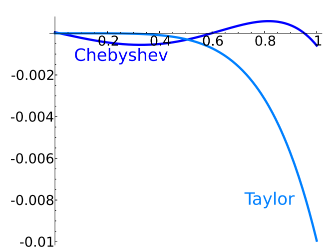
Para reivindicar el polinomio de Taylor se podría argumentar que al no requerir la periodicidad es más general y sobre todo, desde el punto de vista numérico arcaico, que es un polinomio. Algo que evaluamos a mano sin grandes esfuerzos en contraposición con las funciones trascendentes seno y coseno. Sin embargo con un truco ingenioso se puede forzar a que Fourier siga venciendo a Taylor en muchas situaciones. Digamos por ejemplo que deseamos una aproximación polinómica buena de $g(x) = e^x$ en $[0, 1]$ para hacer cálculos a mano. Si forzamos la periodicidad de g, el resultado ni siquiera estaría en $C(\mathbb{T})$, pero f como antes, sí cumple $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ y ambas funciones se relacionan mediante $f(x) = g\big(\cos(2\pi x)\big)$. Aunque no lo parezca, $\cos(n \arccos x)$ es un polinomio para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ [Kör88, §5,§45], son los *polinomios de Chebyshev*, entonces $P_N(x) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n \arccos x)$ son aproximaciones polinómicas de e^x, que provienen de un cambio de variable en la serie de Fourier. Por ejemplo,

$$P_4(x) = 0{,}043793\, x^4 + 0{,}177347\, x^3 + 0{,}499196\, x^2 + 0{,}997307\, x + 1{,}000044$$

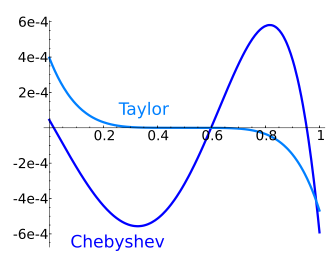
Por otro lado, en Cálculo I nos enseñaron $T_N = \sum_{n=0}^{N} x/n!$ como la aproximación de Taylor más destacada. Las dos primeras figuras muestran las gráficas de los errores $P_N(x) - e^x$ y $T_N(x) - e^x$ para $N = 2$ y $N = 4$, respectivamente:



Segundo grado



Cuarto grado



Cuarto grado y punto medio

La última figura es un jarro de agua fría. Resulta que Taylor en el punto medio, que tiene una fórmula más fea que T_N, todavía vence a Fourier-Chebyshev. Sin embargo, esta victoria dista mucho de ser total. Pensemos en qué ocurriría si deformamos la gráfica de e^x en $[3/4, 1]$ dejando todavía una función $C^\infty\big([0, 1]\big)$. Entonces el polinomio de Taylor, que sólo emplea información local, no podrá aproximar más allá de cierta cantidad fija, mientras que Fourier-Chebyshev convergerá a la función por el Teorema 1.1.1.

La transformada de Fourier explícita más famosa es la de las *funciones gaussianas*:

$$\text{(1.14)} \qquad \boxed{f(x) = e^{-ax^2} \quad \longrightarrow \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2\xi^2/a}} \qquad \text{para } a > 0.$$

Partiendo de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ se llega a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-2zx}\,dx = e^{z^2/a}\sqrt{\pi/a}$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$ y la fórmula anterior se deduce justificando que también es posible tomar z complejo, concretamente $z = \pi\xi i$.

Eligiendo $a = \pi$ se tiene una función que es igual que su transformada (y que su antitransformada). En [DM72, §2.5] hay una descripción completa y sencilla de todas las funciones de L^2 con esta propiedad. Éstas son parte de las *funciones de Hermite* que tienen un papel importante en un cálculo básico de física cuántica.

La transformada y la transformada inversa de Fourier comparten casi la misma definición. A partir de una se deduce la otra por medio de la relación $\widehat{f}(x) = \check{f}\,(-x)$. Por ejemplo, un cálculo sencillo prueba que si $f(x) = e^{-|x|}$ entonces $\widehat{f}(\xi) = 2/(1 + 4\pi^2\xi^2)$, por consiguiente, la transformada de $2/(1 + 4\pi^2x^2)$ es $e^{-|\xi|}$, lo cual no se obtiene por integración directa. Aplicando (1.12), es posible deducir rápidamente el valor de algunas integrales de aspecto complicado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\,d\xi}{(1+4\pi^2\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Una minitabla de transformadas de Fourier, es la siguiente:

f(x)	$\widehat{\text{f}}(\xi)$
$\delta(x)$	1
x^{-1}	$\pi i\,\mathrm{sgn}(\xi)$
$\|x\|^{-1/2}$	$\|\xi\|^{-1/2}$
$\|x\|^{-\nu}$	$\dfrac{\pi\|2\pi\xi\|^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)\cos(\pi\nu/2)}$

f(x)	$\widehat{\text{f}}(\xi)$
$e^{-a\|x\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\xi^2/a}$
$(a^2+x^2)^{-1}$	$\pi a^{-1}e^{-2\pi a\|\xi\|}$
$\mathrm{sech}(ax)$	$\pi a^{-1}\mathrm{sech}(\pi^2a^{-1}\xi)$

donde $0 < \nu < 1$, $a > 0$ y Γ es la función Gamma que estudiaremos en la próxima sección.

Las transformadas de la izquierda no tienen sentido dentro de la integral de Lebesgue pero aun así son útiles. La más sorprendente es la segunda, que hay que entender como límite de $\int_{\epsilon<|x|<M} x^{-1}e(-\xi x)\,dx$ cuando $\epsilon \to 0^+$ y $M \to \infty$. La utilidad de estas transformadas de funciones malas se hace patente cuando se juntan con otras de funciones buenas. Por ejemplo, a pesar de que $|x|^{-1/2}$ no está siquiera en L^2, aplicando formalmente (1.12), se infiere $\int_{\mathbb{R}} |x|^{-1/2}g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-1/2}\widehat{g}(\xi)\,d\xi$, lo cual es una fórmula correcta si g tiene cierta regularidad y decaimiento.