6) Comprueba que si V y W son campos de vectores $\nabla(V\otimes W)=(\nabla V)\otimes W+V\otimes\nabla W$.

Solución. Las componentes de $T=V\otimes W$ son $T^{ij}=V^iW^j$. Utilizando la fórmula para la derivada covariante de un tensor de tipo $(2,0)$:

$$\begin{aligned}\nabla_k T^{ij} &= \partial_k(V^iW^j)+\Gamma^i_{kl}V^lW^j+\Gamma^j_{kl}V^iW^l\\ &= \Big(\partial_k V^i+\Gamma^i_{kl}V^l\Big)W^j+V^i\Big(\partial_k W^j+\Gamma^j_{kl}W^l\Big)\\ &= \Big(\nabla_k V^i\Big)W^j+V^i\Big(\nabla_k W^j\Big)\end{aligned}$$

y la útlima expresión son las componentes de $(\nabla V)\otimes W+V\otimes\nabla W$.

---

7) Si C es la matriz $(\nabla_j V^i)$ con V un campo en $\mathbb{R}^2$ (con la métrica usual) cuando se usan coordenadas cartesianas y P es la matriz correspondiente cuando se emplean coordenadas polares, demuestra que $P=J^{-1}CJ$ donde J es la matriz jacobiana de $x=x(r,\theta)$, $y=y(r,\theta)$.

Solución. Llamemos c^i_j y p^i_j a los elementos de C y P, y escribamos $(x^1,x^2)=(x,y)$, $(z^1,z^2)=(r,\theta)$. Por la tensorialidad de ∇V, al cambiar de coordenadas (carta) se tiene

$$p^i_j=\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial z^j}c^k_l=\frac{\partial z^i}{\partial x^k}c^k_l\frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

Como $\partial x^l/\partial z^j$ son los elementos de la matriz jacobiana y $\partial z^i/\partial x^k$ los de su inversa, basta recordar que el producto de matrices ABC se podía escribir en componentes como $a^i_kb^k_lc^l_j$.

---

8) En los textos básicos de geometría de superficies en $\mathbb{R}^3$ se trabaja con parametrizaciones $\Phi:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, se definen los símbolos de Christoffel como las funciones Γ^k_{ij} tales que $\Gamma^k_{ij}\partial_k\Phi$ es la proyección de $\partial_i\partial_j\Phi$ en el plano tangente Π y se definen las componentes de la derivada covariante de un campo $V(t)$ a lo largo de una curva como c^i con $c^i\partial_i\Phi$ la proyección de $V'(t)$ sobre Π. Explica con detalle por qué esto es coherente con lo visto en este curso.

Solución. La base del plano tangente es $\{\partial_1\Phi,\partial_2\Phi\}$, por tanto los campos de vectores son de la forma $V=V^i\partial_i\Phi$. Si particularizamos en una curva, por la regla de la cadena

$$V'(t)=\Big(\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\partial_i\Phi+V^i\partial_j\partial_i\Phi\Big)\frac{dx^j}{dt}.$$

Por la definición del enunciado, $\partial_j\partial_i\Phi = \Gamma_{ij}^k\partial_k\Phi + \text{un vector normal}$, así pues la proyección de $V'(t)$ sobre Π es

$$\Big(\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\partial_i\Phi + V^i\Gamma_{ij}^k\partial_k\Phi\Big)\frac{dx^j}{dt} = \frac{dV^k}{dt}\partial_k\Phi + \Gamma_{ij}^k V^i\frac{dx^j}{dt}\partial_k\Phi$$

y en este curso usamos ∂_k en vez de $\partial_k\Phi$, por tanto la definición de derivada covariante es equivalente.

Los símbolos de Christoffel del curso también coinciden con los de los cursos de geometría de superficies porque la definición dada en estos, $\partial_j\partial_i\Phi = \Gamma_{ij}^k\partial_k\Phi + \text{un vector normal}$, implica

$$\begin{aligned}\partial_i g_{jl} = \partial_i\langle\partial_j\Phi,\partial_l\Phi\rangle &= \langle\partial_i\partial_j\Phi,\partial_l\Phi\rangle + \langle\partial_j\Phi,\partial_i\partial_l\Phi\rangle\\ &= \langle\Gamma_{ij}^k\partial_k\Phi,\partial_l\Phi\rangle + \langle\partial_j\Phi,\Gamma_{il}^k\partial_k\Phi\rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl} + \Gamma_{il}^k g_{kj}\end{aligned}$$

y ésta es la relación de la que en este curso obtuvimos la fórmula para Γ_{ij}^k en términos de la métrica (Lema 3.3.1 de los apuntes).

---

9) [opcional] Explica por qué

$$\frac{\partial g'_{bc}}{\partial y^a} = \Big(\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^a\partial y^b}\frac{\partial x^k}{\partial y^c} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^a\partial y^c}\frac{\partial x^k}{\partial y^b}\Big)g_{jk} + \frac{\partial x^j}{\partial y^b}\frac{\partial x^k}{\partial y^c}\frac{\partial x^l}{\partial y^a}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}$$

se sigue de la tensorialidad, donde g_{bc} y g'_{bc} son las componentes de la métrica con las coordenadas x^i e y^i respectivamente. Permutando índices deduce que la ley de transformación de $[ab,c] = g_{cl}\Gamma_{ab}^l$, a veces llamados *símbolos de Christoffel de primera especie*, es $[ab,c]' = [ij,k]\partial_a x^i\partial_b x^j\partial_c x^k + g_{jk}\partial_c x^k\partial_a\partial_b x^j$ donde las ∂_i son derivadas con respecto a y^i. Concluye finalmente la ley de transformación de los símbolos de Christoffel habituales:

$$\Gamma'^c_{ab} = \frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\frac{\partial x^j}{\partial y^b}\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^a\partial y^b}.$$

Solución. Derivando con respecto a y^a la relación

$$g'_{bc} = \frac{\partial x^j}{\partial y^b}\frac{\partial x^k}{\partial y^c}g_jk \qquad \text{y sustituyendo} \qquad \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^a} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial y^a}$$

se sigue la primera fórmula del enunciado.

Por la expresión de Γ_{ab}^l en términos de las componentes de la métrica se deduce

$$[ab,c]' = g_{cl}\Gamma_{ab}^l = \frac{1}{2}\big(\partial_b g'_{ca} + \partial_a g'_{bc} - \partial_c g'_{ab}\big).$$

Empleando la primera fórmula del enunciado, el paréntesis con derivadas segundas para $\partial_b g'_{ca}$ es $\partial_a\partial_b x^j\partial_c x^k + \partial_a x^j\partial_b\partial_c x^k$. Permutando índices para $\partial_a g'_{bc}$ y para $-\partial_c g'_{ab}$ se obtienen respectivamente $\partial_b\partial_a x^j\partial_c x^k + \partial_b x^j\partial_a\partial_c x^k$ y $-\partial_b\partial_c x^j\partial_a x^k - \partial_b x^j\partial_c\partial_a x^k$. Al sumar los resultados se sigue

$$[ab,c]' = [lj,k]\partial_b x^j\partial_c x^k\partial_a x^l + g_{jk}\partial_c x^k\partial_a\partial_b x^j,$$

que es lo que afirma el enunciado. Ahora basta multiplicar en ambos miembros por

$$g'^{cl} = \frac{\partial y^c}{\partial x^r}\frac{\partial y^l}{\partial x^m}g^{rm} \qquad \text{y usar} \qquad \frac{\partial x^k}{\partial y^c}\frac{\partial y^c}{\partial x^r} = \delta^k_r$$

para conseguir la fórmula final.

---

10) Un campo de vectores en una variedad riemanniana se dice que es un *campo de Killing* si verifica $V^k\partial_k g_{ij} + g_{kj}\partial_i V^k + g_{ik}\partial_j V^k = 0$ (en un problema especial veremos la motivación para esta extraña definición). Demuestra que esto es equivalente a $\nabla_j\xi_i + \nabla_i\xi_j = 0$ donde $\xi_k = g_{km}V^m$. Indicación: Usa $\nabla_k g_{mn} = 0$ y que $g_{ik}\Gamma^k_{jr} + g_{jk}\Gamma^k_{ir}$ se simplifica mucho.

Solución. La derivada covariante de la métrica es nula, por tanto

$$\begin{aligned}
\nabla_j(g_{im}V^m) + \nabla_i(g_{jm}V^m) &= g_{im}\nabla_j V^m + g_{jm}\nabla_i V^m \\
&= g_{im}\big(\partial_j V^m + \Gamma^m_{jl}V^l\big) + g_{jm}\big(\partial_i V^m + \Gamma^m_{il}V^l\big). \\
&= g_{im}\partial_j V^m + g_{jm}\partial_i V^m + \big(g_{im}\Gamma^m_{jl} + g_{jm}\Gamma^m_{il}\big)V^l.
\end{aligned}$$

Por la expresión de los símbolos de Christoffel en términos de la métrica,

$$g_{im}\Gamma^m_{jl} = \frac{1}{2}g_{im}g^{mr}(\partial_l g_{rj} + \partial_j g_{lr} - \partial_r g_{jl}) = \frac{1}{2}(\partial_l g_{ij} + \partial_j g_{li} - \partial_i g_{jl})$$

Cambiando índices, se obtiene la fórmula similar para $g_{jk}\Gamma^k_{ir}$ y de ahí $g_{im}\Gamma^m_{jl} + g_{jm}\Gamma^m_{il} = \partial_l g_{ij}$.
