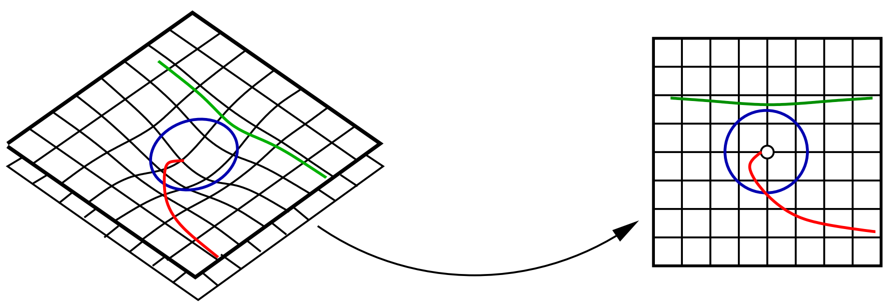
Capítulo 3

Geometría Riemanniana

Imaginemos una hondonada suave en el terreno. Los objetos más lentos que pasasen cerca quedarían atrapados, mientras que los más rápidos se desviarían menos de su trayectoria natural rectilínea. El problema mecánico es intrínsecamente bidimensional, pues el movimiento de las partículas tiene lugar en una superficie. Sin embargo la mecánica de Newton más elemental (la de $F = ma$), lleva a considerar las tres coordenadas x, y, z de nuestro $\mathbb{R}^3$ ambiente y a introducir las fuerzas de reacción del suelo en la dirección de la normal, que al igual que las tensiones de cuerdas y otras fuerzas poco intuitivas[1] de los cursos básicos de mecánica, confunden a los principiantes.



Supongamos unos seres que vivieran en un plano subterráneo paralelo al de la hondonada y que pudieran percibir las proyecciones (sombras) de las trayectorias. Posiblemente concluirían que existe un "sol" en el centro de la hondonada que ejerce una fuerza gravitatoria atractora, pues todo lo que pasa cerca del presunto sol desvía su trayectoria hacia él. Por supuesto, esta fuerza gravitatoria es ficticia y se explica a partir de una deformación geométrica que es susceptible de ser medida intrínsecamente. Éste es el punto de vista de la relatividad general, que se deshace de la gravedad como una fuerza

[1]El principio de acción y reacción dice por ejemplo que si empujamos una pared, la pared nos responde empujándonos a nosotros. Por más que los profesores nos dieran la razón convincente de que si no fuera así, la pared se tendría que mover, lo cierto es que resulta extraño pensar que a la pared le entren ganas de empujarnos.

real y explica sus efectos afirmando que el espacio-tiempo se curva en las cercanías de una masa.

La búsqueda de elegir libremente las coordenadas y la naturalidad de un tratamiento intrínseco, acerca la mecánica a la geometría diferencial. En esta dirección, hay una solución elegante y físicamente muy interesante del problema mecánico que involucra longitudes de vectores tangentes. Matemáticamente, una vez fijada una manera de medir vectores en el espacio tangente de una variedad, lo que se llama una *métrica*, tendremos trayectorias naturales de las partículas libres, que llamaremos *geodésicas*. Inventando una derivada especial adaptada a la métrica, la *derivada covariante*, se recupera el *principio de inercia* que dice que en ausencia de fuerzas la derivada de la velocidad (la aceleración) es cero, de esta forma las geodésicas son el análogo de las rectas de la geometría euclídea.

Una métrica expresa cierta deformación con respecto a la geometría euclídea a la que más adelante daremos carácter tensorial. Las bases de todo ello, y en realidad de la propia geometría diferencial, las asentó B. Riemann en una famosa lección inaugural sin apenas fórmulas (véase [Spi79, Ch.4]). En su honor se llama *geometría riemanniana* a la geometría de las variedades dotadas de una métrica. Más de sesenta años después, A. Einstein formuló la relatividad general; una teoría geométrica de la gravitación que postula que la masa y la energía deforman el espacio-tiempo dotándole de una estructura de variedad cuatridimensional con una métrica bien distinta de la euclídea.

3.1. Mecánica y métricas

Supongamos una partícula de masa m en un campo con energía potencial $U(x,y,z)$. Según los cursos básicos de Física, su ecuación de movimiento viene dada por la solución de

$$m\ddot{x}+\frac{\partial U}{\partial x}=0,\qquad m\ddot{y}+\frac{\partial U}{\partial y}=0,\qquad m\ddot{z}+\frac{\partial U}{\partial z}=0 \tag{3.1}$$

donde emplearemos la notación de los físicos, heredada de los trabajos de Newton, consistente en señalar una o dos derivadas con respecto al tiempo con uno o dos puntos sobre la función dada. Consideremos ahora el *lagrangiano*, la diferencia entre la energía cinética y la potencial:

$$L=L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=T-U=\frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\big)-U(x,y,z).$$

Entonces las ecuaciones de Newton (3.1) son equivalentes a

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\Big)=\frac{\partial L}{\partial q^i}\qquad \text{para } i=1,2,3 \text{ con } q^1=x,\ q^2=y,\ q^3=z. \tag{3.2}$$

Los matemáticos formalistas se mostrarán reacios a escribir una derivada con respecto a la derivada de una función pero el sentido está claro, simplemente por ejemplo $\partial L/\partial \dot{x}$ significa la parcial de L con respecto a la cuarta variable y sustituir en su lugar $\dot{x}$.

En principio parece que no hay ninguna ventaja en escribir (3.2) en lugar de (3.1), sin embargo el siguiente resultado básico de cálculo de variaciones nos dará una nueva visión.

Proposición 3.1.1 *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$ *sea* $\mathcal{C} = \{F = (q^1, \dots, q^n) \ : \ q^j \in C^2([a,b]),\ F(a) = \vec{c},\ F(b) = \vec{d}\}$. *Supongamos que* $\int_a^b L$ *con* $L = L(t, F(t), \dot{F}(t))$ *alcanza un máximo o un mínimo en* $\mathcal{C}$ *para cierta* F*, entonces* F *es solución de las* ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange*:*

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\Big) = \frac{\partial L}{\partial q^k} \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{3.3}$$

Demostración: Si la integral alcanza un extremo en $\mathcal{C}$ para $F = F_0(t)$ entonces para cualquier función regular $\alpha = \alpha(t)$ con $\alpha(a) = \alpha(b) = \vec{0}$ se cumple que la función real

$$f(\epsilon) = \int_a^b L(t, F_0(t) + \epsilon\alpha(t), \dot{F}_0(t) + \epsilon\dot{\alpha}(t))\, dt$$

alcanza un extremo en $\epsilon = 0$. Nuestros conocimientos del primer curso de cálculo, llevan a $f'(0) = 0$. Derivando bajo el signo integral y con una integración por partes

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^k}\alpha^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{\alpha}^k\right) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\Big)\right)\alpha^k$$

donde α^k son las componentes de α. como éstas son arbitrarias, la única posibilidad para que la integral sea siempre nula es que se cumpla (3.3). $\Box$

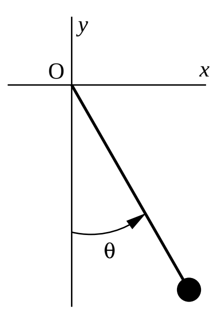
La gran ventaja es que las ecuaciones de Euler-Lagrange manifiestan que cierto funcional es estacionario y tal condición es independiente de las coordenadas. Por ejemplo los máximos y mínimos (y los valores estacionarios en general) de $f(x)$ son los mismos que los de $f(3x - \operatorname{sen} x)$ o $f(-x - x^3)$. Es decir, aunque no lo parezca, (3.2) sigue describiendo el movimiento de la partícula si empleamos por ejemplo coordenadas cilíndricas $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = z$. La idea de que las leyes físicas se puedan interpretar sin referencia a coordenadas específicas, en términos de los extremos de cierto funcional es muy atractiva y de una forma u otra ha sobrevivido a las revoluciones relativista y cuántica del siglo XX.

Tanto (3.1) como (3.2) se generalizan sin dificultad al caso de N partículas, simplemente la dimensión pasa de 3 a $3N$ y U quizá refleje también interacciones entre las partículas. Establecer ligaduras significa forzar relaciones entre las variables haciendo que el *espacio de configuración*, el conjunto donde potencialmente se mueven las variables, pase de $\mathbb{R}^{3N}$ a una subvariedad suya. Por ejemplo, una partícula en $\mathbb{R}^3$ restringiría su movimiento a S^1 si tiene la ligadura de ser una cuenta de collar. Desde el punto de vista físico-teórico, las ligaduras equivalen a poner una barrera de potencial, es decir, a declarar que se necesitaría demasiada energía para salirse de esa subvariedad tomando U muy grande fuera de ella [Arn78, 17]. Por tanto es una hipótesis física natural suponer que las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.3) dan las ecuaciones de movimiento con $L = T - U$ (energía cinética y potencial) también en el caso en que hay ligaduras, expresando T y U en términos de q^i y $\dot{q}^i$, $1 \le i \le n$ con q^i variables independientes que describen la configuración del sistema. A estas variables se les llama *coordenadas generalizadas* mientras que n, la dimensión de la subvariedad, se conoce como número de *grados de libertad*

En el ámbito de la mencánica clásica se llama a la hipótesis anterior *principio de mínima acción* o *principio de Hamilton*. El enunciado que se encuentra para este principio en algunos libros de Física [LL76], es del tipo:

> **Principio de mínima acción.** *Si en los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$ el sistema ocupa posiciones que se caracterizan por dos conjuntos de valores de las coordenadas, entonces entre estas posiciones el sistema se moverá de manera que la* acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$ *tendrá el menor valor posible.*

Literalmente el principio no es correcto y más bien debería decir que la acción es estacionaria o mínima "localmente" (en intervalos de tiempo pequeños). Se puede encontrar una buena introducción elemental en [FLS64, Ch.19].



Aunque en geometría sólo nos interesemos en el caso $U = 0$, a modo de ilustración analizaremos el caso del péndulo simple, en el que hay un potencial gravitatorio.

El bien conocido esquema es una varilla inextensible sin masa de longitud l que puede girar en el plano alrededor de uno de sus extremos y tiene una partícula de masa m en el otro. La energía cinética de esta partícula es $\frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big)$ y la potencial mgy. ahora bien, las coordenadas (x, y) de la partícula no son variables independientes: el sistema sólo tiene un grado de libertad. La manera natural de describirlo es con el ángulo que forma la varilla con la vertical. Se tiene $x = l \operatorname{sen}\theta$, $y = -l\cos\theta$ y el lagrangiano en términos de la coordenada generalizada θ es

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\big((l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)^2\big) + mgl\cos\theta = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

y por tanto

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\Big) = ml^2\ddot{\theta}, \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -mgl\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.3) conducen a la conocida ecuación del péndulo, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$, sin necesidad de pensar en la tensión de la varilla.

Si nos olvidamos de U, que refleja que el sistema está inmerso en un campo de fuerzas, el lagrangiano en cada punto es una forma cuadrática definida positiva en $\dot{q}^i$. En términos geométricos, en cada punto indica una manera de medir vectores tangentes, o equivalentemente (por polarización) un producto escalar entre ellos. Motivados por la relatividad, en primera instancia exigimos la no degeneración en vez de la positividad a este producto escalar.

Definición: Un campo tensorial G de tipo $(0,2)$ en una variedad se dice que es una *métrica* si sus componentes g_{ij} forman una matriz simétrica no singular en cada punto.

Definición: Una *variedad semiriemanniana* (o *variedad pseudoriemanniana*) es una variedad dotada de una métrica y se dice que es *variedad riemanniana* si la métrica es definida positiva en cada punto.

Si en una carta $\big(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n)\big)$ una métrica tiene componentes g_{ij}, para cada par de campos de vectores $X = X^i\partial_i$, $Y = Y^i\partial_i$ se tiene, por definición $G(X,Y) = g_{ij}X^iY^j$. Si queremos referirnos a a métrica G sin mencionar las componentes de los vectores a los que se aplica, en pura ortodoxia notacional se escribe $g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ ya que $dx^i(X) = X^i$ y $dx^i(Y) = Y^i$, como covectores, y $\otimes$ significa el producto del resultado de aplicar dos tensores. Esta operación se define en general para cualquier par de tensores[2].

<u>Ejemplo</u>: En $\mathbb{R}^n$ con la carta trivial la métrica que corresponde al producto escalar usual es $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ con $g_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso. ésta es la *métrica usual* y la más empleada, pero hay una infinidad de formas de convertir $\mathbb{R}^n$ en una variedad semiriemanniana.

La forma clásica de expresar una métrica, a veces denostada por los matemáticos, reemplaza productos tensoriales por productos habituales en un sentido formal. Así la métrica usual en $\mathbb{R}^2$ se escribiría dx^2+dy^2 y la métrica $dx\otimes dx+dx\otimes dy+dy\otimes dx+10dy\otimes dy$ sería $dx^2+2dxdy+10dy^2$. También es habitual el nombre común ds^2 en vez de G, incluso si la métrica no es definida positiva.

Al igual que el lagrangiano $L = T$ (energía cinética) determina las ecuaciones de movimiento intrínsicamente, sin estar forzados a emplear un sistema de coordenadas externo; también una métrica determina unas curvas destacadas en una variedad riemanniana. En ambos casos, lo que se obtiene es una generalización de las rectas. En el primer caso por analogía con el *principio de inercia* (en ausencia de fuerzas el movimiento es rectilíneo y uniforme) y en el segundo por la propiedad minimizante de la distancia que estudiaremos más adelante.

[2]Si T es un tensor de tipo (r,s) y S es un tensor de tipo (u,v), se llama *producto tensorial* de T y S al tensor $T\otimes S$ de tipo $(r+u, s+v)$ cuyo valor es $T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)\cdot S(\widetilde{\varphi}^{r+1}, \dots, \widetilde{\varphi}^{r+u}, \vec{v}_{s+1}, \dots, \vec{v}_{s+v})$ en $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^{r+u}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{s+v})$.

Definición: Dada una variedad semiriemanniana M, se dice que una curva parametrizada $c : I \longrightarrow M$ es una *geodésica* si en cada carta $(\mathcal{U}, \phi)$ con $\operatorname{Im} c \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, las funciones $(\phi \circ c)(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange para $L = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ con g_{ij} las componentes de la métrica de M.

El diccionario geométrico de la mecánica es entonces:

Mecánica		**Geometría**
espacio de configuración	$\longrightarrow$	variedad riemanniana M
grados de libertad	$\longrightarrow$	dimensión de M
coordenadas generalizadas	$\longrightarrow$	funciones coordenadas
energía cinética	$\longrightarrow$	métrica en M
ecuaciones de movimiento	$\longrightarrow$	geodésicas

Ejemplo: Sea G la métrica usual en $\mathbb{R}^2$, entonces $L = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ con $q^1 = x$, $q^2 = y$. Los cálculos para las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\big) = \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 2\ddot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

y lo mismo con y. Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0$$

que se resuelven como $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a_0, b_0)$. Esto concuerda con el principio de inercia. En coordenadas polares, un cálculo prueba $L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\big) = \frac{\partial L}{\partial r} & \Rightarrow & \ddot{r} = r\dot{\theta}^2, \\ \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\big) = \frac{\partial L}{\partial \theta} & \Rightarrow & r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Estas ecuaciones tan complicadas todavía representan las mismas trayectorias rectilíneas. Por ejemplo, podemos comprobar que $r(t) = 1/\operatorname{sen}\theta(t)$ con $\cot\theta(t) = t$, correspondiente a la recta horizontal antes mencionada, es solución.

Como anticipo de una breve introducción a la relatividad, consideremos una métrica que no es definida positiva y en la que intencionamente una de las funciones coordenadas se llama t, lo que obliga a un pequeño cambio notacional.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, denominando a las funciones coordenadas (t, x) consideramos la métrica $G = -e^{x^2}dt^2 + dx^2$. LLamando τ al parámetro de las geodésicas, éstas quedan determinadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad \text{con} \quad L = -e^{x^2}\dot{t}^2 + \dot{x}^2.$$

La primera ecuación implica $e^{x^2}\dot{t}^2 = K = \text{cte}$ y sustituyendo en la segunda

$$\ddot{x} + K^2 x e^{-x^2} = 0.$$

Esta fórmula implica que si $x(0) > 0$ y $\dot{x}(0) = 0$ entonces $\ddot{x}(0) < 0$. En términos mecánicos, si x representa el espacio, una partícula que parte del reposo en $\mathbb{R}^+$ se acelerará hacia el origen. La situación es simétrica en $\mathbb{R}^-$ y entonces podemos explicar la gravedad atractiva de un sol en el origen de la recta real $\mathbb{R}$, convenciendo a sus habitantes de que su tiempo y espacio tienen conjuntamente la métrica anterior. Dentro de este esquema, el tiempo t es sólo una función coordenada más del espacio de configuración que se relaciona a lo largo de cada geodésica $\gamma = \gamma(\tau)$ con el parámetro τ.

3.2. Introducción a la relatividad

La relatividad especial adquirió gracias a H. Minkowski una formulación geométrica elegante en términos de una métrica. Dicho sea de paso, tal formulación no fue inicialmente del agrado de Einstein pero irónicamente fue el primer paso que permitió que años después formulase su teoría geométrica de la gravedad, la relatividad general. Por ello y por la importancia de la relatividad dentro de la cultura científica, nos entretendremos aquí con algunas deducciones matemáticas en la base de la relatividad especial.

Antes de comenzar y para el resto del capítulo, cada vez que tratemos magnitudes físicas supondremos que hemos elegido unidades, llamadas relativistas, tales que la velocidad de la luz c es 1.

$$\text{unidades relativistas} \quad \longleftrightarrow \quad c = 1.$$

Como en el sistema internacional $c = 299\ 792\ 458\ m/s$ (en 1983 se redefinió el metro para que c tuviera este valor exacto) no es una constante adimensional, imponiendo $c = 1$ se pueden medir metros en segundos y viceversa: $299\ 792\ 458m = 1s$, haciendo hincapié en la idea de que espacio y tiempo son todo uno y se habla del *espacio-tiempo*; idea que, por cierto, es de Minkowski[3] aunque a menudo se atribuye a Einstein.

[3]Minkowski afirmó: "A partir de ahora el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo, están condenados a desvanecerse en meras sombras y sólo una especie de unión de ambos conservará una realidad independiente" [LEMWed].