**1)** Se define el volumen de una variedad riemanniana orientable (con o sin borde) de dimensión $n$ como la integral (si existe) de $\omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ con $g$ el determinante de las componentes de la métrica en la carta elegida. Usando la métrica inducida por la usual, calcula el volumen del "cilindro" $\big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ -1 \le t \le 1\big\}$ y el volumen (área) de la superficie toroidal $\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 1\big\}$.

**2)** Demuestra que en el caso de $S^2$ la forma $\omega$ del ejercicio anterior coincide con $i^*\eta$ donde $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión y $\eta = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$.

**3)** Consideremos el paraboloide $P = \{z = x^2 + y^2\}$ como subvariedad de $\mathbb{R}^3$. Sea $f$ la función que aplica cada punto $(x, y, z) \in P$ en $(x + y, x - y, 5z) \in \mathbb{R}^3$ y $\omega = xdx + dz$. Comprueba que se cumple la relación $d(f^*\omega) = f^*d\omega$.

**4)** Inventa un teorema de la divergencia análogo al del curso de Cálculo II pero en $\mathbb{R}^4$. Intenta dar algún sentido a la afirmación "el rotacional en $\mathbb{R}^4$ tiene seis componentes", recordando el papel desempeñado por el rotacional en ese curso.

**5)** Comprueba el teorema de Stokes haciendo ambas integrales para la forma $\omega = i^*(z\, dx + x\, dy + y\, dz)$ sobre $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - x^2 - y^2, \ z \ge 0\}$, donde $i : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión (no confundirla con $i : \partial M \longrightarrow M$).

**6)** Da un contraejemplo explícito que muestre que el teorema del punto dijo de Brouwer no es cierto en ninguna dimensión si se cambia la bola cerrada por la bola abierta. Indicación: Recuerda que la bola abierta y $\mathbb{R}^n$ eran difeomorfos.

**7)** Dadas $M$ y $N$ variedades compactas orientables de la misma dimensión, se conoce que para cada $f : M \longrightarrow N$ existe un entero $n(f)$ tal que $\int_M f^*\omega = n(f) \int_N \omega$ para cualquier $\omega$.

a) Halla el grado de la aplicación en $S^2$ que pasa cada punto a sus antípodas empleando la forma de volumen $\omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta \wedge d\varphi$.

b) La invariancia de $n(f)$ por homotopía impide que exista $F : [0, 1] \times S^2 \longrightarrow S^2$ tal que $F(0, \vec{x}) = \vec{x}$ y $F(1, \vec{x}) = -\vec{x}$. Prueba que sin embargo tal homotopía existe en $S^3$.

**8)** Halla una función $f$ tal que la 1-forma $\omega = -yf(x^2 + y^2)\, dx + xf(x^2 + y^2)dy$ verifique $d\omega + \omega \wedge \omega = (1 + x^2 + y^2)^{-2}\, dx \wedge dy$. Nota: Este cálculo tiene que ver con el llamado *monopolo de Dirac* en coordenadas estereográficas.

**9)** Prueba que si $\Gamma$ es una matriz de uno formas, entonces $\Omega = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ implica $d\Omega = \Omega \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \Omega$. Nota: Ésta es la base para una relación entre derivadas covariantes del tensor de Riemann llamada *identidad de Bianchi* que es relevante en relatividad general.

**10)** Con cambios de carta adecuados la métrica (supuesta definida positiva) de una variedad riemanniana de dimensión 2 se puede escribir como $e^{2v}(dx^2 + dy^2)$ para cierta $v = v(x, y)$. En ese caso las matrices de símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_1 = \big(\Gamma^i_{j1}\big) = \begin{pmatrix} \partial_1 v & \partial_2 v \\ -\partial_2 v & \partial_1 v \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Gamma_2 = \big(\Gamma^i_{j2}\big) = \begin{pmatrix} \partial_2 v & -\partial_1 v \\ \partial_1 v & \partial_2 v \end{pmatrix}$$

Además $\Gamma = \Gamma_1 dx + \Gamma_2 dy$ cumple $\Gamma \wedge \Gamma = 0$ (todo esto son cálculos tediosos pero sencillos que daremos por supuestos). Con esta información, calcula todas las componentes $R^i_{jkl}$ del tensor de Riemann y comprueba que la curvatura escalar es $R = -2e^{-2v}\Delta v$ con $\Delta v$ el laplaciano.

**11)** Dado $C = \{V_1, \dots, V_{n-1}\}$ un conjunto de campos de vectores en $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente en cada punto, se define

$$\omega_C = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \big(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n\big)(V_1, \dots, V_{n-1})\, dx^i.$$

a) Prueba que un campo $V$ es en cada punto combinación lineal de $C$ si y solo si $\omega_C(V) = 0$.

b) Un famoso resultado (teorema de Frobenius) asegura que localmente, alrededor de cada punto, existe una subvariedad $N$ tal que $T_p(N)$ tiene a $C$ como base para todo $p \in N$ si y solo si $d\omega \wedge \omega = 0$. Sabiendo esto, decide si en $\mathbb{R}^3$ existen tales $N$ para $C = \big\{\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}\big\}$.

c) Explica por qué $d\omega \wedge \omega = 0$ se satisface trivialmente en $\mathbb{R}^2$ e interprétalo geométricamente a la luz del apartado anterior.

**12)** [opcional] El campo electromagnético se representa por dos campos vectoriales, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, en $\mathbb{R}^3$ que en ausencia de cargas y corrientes están gobernados por las *ecuaciones de Maxwell*

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Consideramos $\mathbb{R}^4$ con la carta identidad. Sea $*$ la aplicación $f$-lineal en $\Omega^2(\mathbb{R}^4)$ tal que $*(dx^i \wedge dx^j) \wedge dx^i \wedge dx^j = \pm dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$ para $i \neq j$ donde se escoge el signo $-$ si y sólo si $i = 1$ o $j = 1$. Por ejemplo, $*(dx^3 \wedge dx^4) = dx^1 \wedge dx^2$ y $*(dx^1 \wedge dx^3) = dx^2 \wedge dx^4$. Comprueba que definiendo el *tensor de Faraday* $F = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ con $(F_{21}, F_{31}, F_{41}) = \vec{E}$, $(F_{34}, F_{42}, F_{23}) = \vec{B}$ y el resto de los $F_{ij}$ nulos, las ecuaciones de Maxwell equivalen a $dF = d * F = 0$ con la notación $(t, x, y, z) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$.