En esta hoja la conexión es siempre la de Levi-Civita y se abrevia $\frac{\partial}{\partial x^i}$ por $\partial_i$ y $\nabla_{\partial_j}$ por $\nabla_j$.

**1)** Recuerda (o aprende) que el *corchete de Lie* de dos campos de vectores $X = X^i\partial_i$ e $Y = Y^i\partial_i$, es el campo vectores $[X,Y] = X(Y^j)\partial_j - Y(X^j)\partial_j$. Muestra con un cálculo que $[X,Y] = X^i\nabla_i Y - Y^i\nabla_i X$.

**2)** Comprueba que $T(X,Y,Z) = \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X$ es $f$-lineal en cada argumento, esto es, se cumple $fT(X,Y,Z) = T(fX,Y,Z) = T(X,fY,Z) = T(X,Y,fZ)$ para cualquier $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Indicación: Para simplificar puedes dar por supuesto $[fY,Z] = f[Y,Z] - Z(f)Y$ y $[Y,Z](f) = Y\big(Z(f)\big) - Z\big(Y(f)\big)$ que se siguen fácilmente de la definición del corchete de Lie.

**3)** Halla todas las métricas en $\mathbb{R}$ para las que $\Gamma^1_{11} = 1$ y caracteriza todos los campos de vectores y todas las 1-formas con derivada covariante nula.

**4)** Explica por qué, usando coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$, todos los vectores del campo $V = \cos(\theta - \pi/4)\partial/\partial r + r^{-1}\cos(\theta + \pi/4)\partial/\partial\theta$ son paralelos en el sentido habitual. Haz los cálculos en estas coordenadas que muestren que realmente $\nabla_X V = 0$ para cualquier $X$. Indicación: Los símbolos de Christoffel no nulos en coordenadas polares $(r,\theta)$ son $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = r^{-1}$, $\Gamma^1_{22} = -r$.

**5)** Consideremos el semiplano de Poincaré con su métrica $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Por un ejercicio anterior, los únicos símbolos de Christoffel no nulos son $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = -y^{-1}$. Calcula la derivada covariante de $V = f(y)\partial_1$ y halla $f \neq 0$ de modo que sea un transporte paralelo cuando se restringe a la curva $c(t) = (0, 1+t)$. ¿Sabrías deducir que $h(x,y)\big(\partial_1 + y\partial_2\big)$ con $h \neq 0$ no es un transporte paralelo a lo largo de $c$ sin repetir las cuentas? Indicación: Recuerda que $G(V,V)$ y $G(V,W)$ son constantes por transportes paralelos.

**6)** Comprueba que si $V$ y $W$ son campos de vectores $\nabla(V \otimes W) = (\nabla V) \otimes W + V \otimes \nabla W$.

**7)** Si $C$ es la matriz $(\nabla_j V^i)$ con $V$ un campo en $\mathbb{R}^2$ (con la métrica usual) cuando se usan coordenadas cartesianas y $P$ es la matriz correspondiente cuando se emplean coordenadas polares, demuestra que $P = J^{-1}CJ$ donde $J$ es la matriz jacobiana de $x = x(r,\theta)$, $y = y(r,\theta)$.

**8)** En los textos básicos de geometría de superficies en $\mathbb{R}^3$ se trabaja con parametrizaciones $\Phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se definen los símbolos de Christoffel como las funciones $\Gamma^k_{ij}$ tales que $\Gamma^k_{ij}\partial_k\Phi$ es la proyección de $\partial_i\partial_j\Phi$ en el plano tangente $\Pi$ y se definen las componentes de la derivada covariante de un campo $V(t)$ a lo largo de una curva como $c^i$ con $c^i\partial_i\Phi$ la proyección de $V'(t)$ sobre $\Pi$. Explica con detalle por qué esto es coherente con lo visto en este curso.

**9)** [opcional] Explica por qué

$$\frac{\partial g'_{bc}}{\partial y^a} = \Big(\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^a \partial y^b}\frac{\partial x^k}{\partial y^c} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^a \partial y^c}\frac{\partial x^k}{\partial y^b}\Big)g_{jk} + \frac{\partial x^j}{\partial y^b}\frac{\partial x^k}{\partial y^c}\frac{\partial x^l}{\partial y^a}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}$$

se sigue de la tensorialidad, donde $g_{bc}$ y $g'_{bc}$ son las componentes de la métrica con las coordenadas $x^i$ e $y^i$ respectivamente. Permutando índices deduce que la ley de transformación de $[ab,c] = g_{cl}\Gamma^l_{ab}$, a veces llamados *símbolos de Christoffel de primera especie*, es $[ab,c]' = [ij,k]\partial_a x^i \partial_b x^j \partial_c x^k + g_{jk}\partial_c x^k \partial_a \partial_b x^j$ donde las $\partial_i$ son derivadas con respecto a $y^i$. Concluye finalmente la ley de transformación de los símbolos de Christoffel habituales:

$$\Gamma'^c_{ab} = \frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\frac{\partial x^j}{\partial y^b}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial y^c}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^a \partial y^b}.$$

**10)** Un campo de vectores en una variedad riemanniana se dice que es un *campo de Killing* si verifica $V^k\partial_k g_{ij} + g_{kj}\partial_i V^k + g_{ik}\partial_j V^k = 0$ (en un problema especial veremos la motivación para esta extraña definición). Demuestra que esto es equivalente a $\nabla_j \xi_i + \nabla_i \xi_j = 0$ donde $\xi_k = g_{km}V^m$. Indicación: Usa $\nabla_k g_{mn} = 0$ y que $g_{ik}\Gamma^k_{jr} + g_{jk}\Gamma^k_{ir}$ se simplifica mucho.

**11)** Prueba que si en $\mathbb{R}^2$ tenemos una métrica riemanniana de la forma $A(x)dx^2 + B(y)dy^2$ entonces el tensor de Ricci es nulo. Indicación: Se puede resolver en dos líneas. Busca una carta mejor.

**12)** Si en una variedad consideramos las métricas $g_{ij}dx^i dx^j$ y $\lambda g_{ij}dx^i dx^j$ con $\lambda$ una constante, encuentra qué relación existe entre las componentes de los tensores de Riemann correspondientes a ambas métricas. Estudia también el problema para las curvaturas escalares.

**13)** Usando las simetrías del tensor de Riemann, demuestra que en dimensión 2 si usamos una carta tal que la métrica es diagonal, esto es $g_{12} = g_{21} = 0$, entonces el tensor de Ricci también es diagonal, esto es, $R_{12} = R_{21} = R^{12} = R^{21} = 0$.

**14)** Halla todas las componentes del tensor de Ricci y la curvatura escalar para el semiplano de Poincaré que tiene por métrica $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. *Indicación*: Los símbolos de Christoffel ya se han mencionado antes. Gracias al ejercicio anterior, es suficiente calcular $R_{11}$ y $R_{22}$.

**15)** Haz el cálculo de la curvatura escalar de $S^2$. Indicación: Puedes dar por hecho que los símbolos de Christoffel no nulos en esféricas son $\Gamma^1_{22} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$.

**16)** Sea $M = \mathbb{R}^+ \times (0,1)$ con la métrica $dx^2 + (e^x - e^{-x})^2 dy^2$. Calcular la curvatura escalar. Indicación: Hay una manera breve e ingeniosa de proceder usando la curvatura escalar de $S^2$.

**17)** En Errelandia sus habitantes creen vivir en una recta real, $\mathbb{R}$, bajo la acción de la gravedad y finalmente un físico les ha convencido de que no hay un sol en el origen, sino que que el espacio-tiempo tiene la métrica $B^2(x)dt^2 - dx^2$ donde $B \neq 0$ en $\mathbb{R} - \{0\}$. Suponiendo que fuera del origen se cumple $R_{ij} = 0$ (esto es lo que se pide al espacio-tiempo vacío en relatividad general) y que $B(0) = 0$, $B'(0) = 1$, calcula la función $B$. Una vez hallada, estudia qué métrica se obtendría si se decretase que las nuevas coordenadas del espacio-tiempo que deben usar los errelandeses son $X = x\cosh t$, $T = x\operatorname{senh} t$.