1) Considerando $\mathbb{R}^3$ como variedad, escribe la uno forma $x\,dx + y\,dy + z\,dz$ en coordenadas esféricas. ¿Se te ocurre alguna manera de evitar los tediosos cálculos? Quizá te ayude recordar las ecuaciones diferenciales exactas del curso de segundo.

2) La definición que habíamos dado de métrica dependía de las componentes y no es del todo obvio que sea invariante por cambios de carta. Digamos que g_{ij} son componentes de un tensor de tipo $(0,2)$ que cumplen las condiciones de la definición de métrica.

a) Demuestra que $g_{ij} = g_{ji}$ se sigue cumpliendo tras un cambio de carta.

b) Demuestra que $\det M \neq 0$, con M la matriz de componentes, se sigue cumpliendo tras un cambio de carta. Indicación: Expresa con matrices la ley de transformación.

c) Intenta ver que la primera propiedad falla para tensores de tipo $(1,1)$. Concretamente, busca una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con matriz simétrica en una base pero no en otra. ¿Qué aplicaciones lineales L tienen matrices simétricas en todas las bases?

3) Sea la aplicación $F : S^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$, donde $\mathrm{SO}(3)$ es la variedad formada por las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ (centradas en el origen) y $F(\vec{u}, t)$ es la aplicación lineal

$$\vec{x} \longmapsto (\vec{x} \times \vec{u}) \operatorname{sen} t - \vec{x} \cos t + 2\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{x}) \cos^2(t/2)$$

con $\times$ y $\cdot$ los productos vectorial y escalar usuales en $\mathbb{R}^3$. Prueba que F está bien definida, es decir, que esta aplicación es una rotación, de hecho con eje $\vec{u}$. Si en S^2 usamos coordenadas esféricas (θ, φ) para $\vec{u}$ y la carta trivial en $\mathbb{R}$, halla las derivadas parciales de $f = \mathrm{Tr}(F)$ con Tr la traza de la matriz.

4) Considera $\mathbb{R}^2$ con la carta trivial $(x^1, x^2) = (x, y)$ y un campo de uno formas $T = T_i dx^i$ Muestra con un ejemplo que $\frac{\partial T_1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial T_2}{\partial x^2} dx^2$ no es tensorial en el sentido de que al usar una nueva carta (z^1, z^2) en la que T tiene componentes T_i', la expresión anterior no coincide en general con $\frac{\partial T_1'}{\partial z^1} dz^1 + \frac{\partial T_2'}{\partial z^2} dz^2$.

***5)** [Opcional] Con la notación del problema anterior, prueba que

$$\big(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\big) dx^1 \otimes dx^2 + \big(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\big) dx^2 \otimes dx^1$$

es tensorial, es decir que un cambio de carta sobre este tensor $(0,2)$ se reduce a cambiar x^i por z^i y T_i por T_i'.

6) Sabiendo que entre las superficies de revolución cuyos bordes son $\{x^2 + y^2 = 4,\ z = \pm 1\}$ hay una de área mínima, prueba que es $\sqrt{x^2 + y^2} = C \cosh(z/C)$ con $C \approx 1.69$. Indicación: Recuerda (o demuestra) que si la gráfica de $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$ gira alrededor del eje X el área de la superficie resultante es $2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$. Después aplica cálculo de variaciones, preferentemente valiéndote de la energía.

7) Si estudiando problemas unidimensionales alguien emplea una variable x y otra persona una y tal que $x = g(y)$, con $g'(y) \neq 0$, entonces los lagrangianos correspondientes serán $L_1(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x})$ y $L_2(y, \dot{y}) = L\big(g(y), g'(y)\dot{y}\big)$. Si $y(t)$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L_2, para que todo sea coherente, $g\big(y(t)\big)$ debiera ser solución de las ecuaciones para L_1. Prueba que es así.

8) Al estudiar la gravitación Newtoniana el lagrangiano es $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + GMm(x^2 + y^2)^{-1/2}$. Pásalo a polares y después escribe las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes para obtener que $r^2\dot{\theta}$ es constante. Explica por qué se deduce de ello la segunda ley de Kepler: el vector $\big(x(t), y(t)\big)$ barre áreas iguales en tiempos iguales. Indicación: Recuerda o busca la fórmula para el área dentro de una curva definida en polares.

9) Prueba que la métrica usual de S^2 en esféricas es $d\theta \otimes d\theta + (\operatorname{sen}^2\theta)d\varphi \otimes d\varphi$. Calcula también sus componentes cuando se emplea como carta la proyección estereográfica.

10) Demuestra que $r = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^{-1}$ con $\theta = \arctan\frac{t}{\sqrt{2}-t}$ define una geodésica en $\mathbb{R}^2$ con la métrica en polares $dr^2 + r^2 d\theta^2$. Indicación: No es necesario siquiera escribir la ecuación de las geodésicas, la métrica es una bien conocida de $\mathbb{R}^2$.

11) Con lo aprendido en este curso, explica por qué la generatriz de una superficie de revolución (parametrizada por longitud de arco) es una geodésica.

12) Calcula los símbolos de Christoffel para la métrica $dr^2 + 4\operatorname{senh}^2 r\ d\theta^2$ y halla alguna de las geodésicas.

13) Calcula los símbolos de Christoffel y las fórmulas para las geodésicas de $\mathbb{R}^2$ cuando se le dota con la métrica $du^2 + 4v du dv + 8v^2 dv^2$.

14) En $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tomamos la métrica $(x + y)dx^2 + (x + y)dy^2$.

a) Demuestra que a lo largo de cualquier geodésica, $(\dot{x} - \dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ es constante.

b) Prueba que es posible parametrizar la (semi-)recta $\{y = x\}$ de forma que sea una geodésica y que esto es imposible para $\{y = 2x\}$.

15) Considera la banda $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x| < 1\}$ con la métrica $4(1 - x^2)^{-2}dx^2 + xydxdy + (1 + x^2 + y^2)dy^2$. Utiliza que la energía es constante para calcular las geodésicas horizontales de M sin necesidad de hallar los símbolos de Christoffel.

16) Se llama *semiplano de Poincaré* a $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ :\ \operatorname{Im} z > 0\}$ dotado de la métrica $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$ donde (x, y) es la carta dada por la parte real y la parte imaginaria de z.

a) Calcula los símbolos de Christoffel.

b) Prueba que las rectas verticales $x = x_0$ convenientemente parametrizadas son geodésicas.

c) Demuestra que la transformación $z \mapsto -1/z$ deja invariante la métrica.