1) Responde brevemente a las siguientes preguntas:

i) Si $T = T(\vec{x}, \vec{y})$ y $S = S(\vec{x}, \vec{y})$ son tensores, ¿lo es $T(\vec{x}, \vec{y}) \cdot S(\vec{x}, \vec{y})$? ¿y $T(\vec{x}, \vec{y}) + S(\vec{x}, \vec{y})$?

ii) ¿Es $T(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$ una aplicación bilineal?

iii) ¿Cuántas componentes tiene un tensor de tipo (r, s) con $V = \mathbb{R}^m$?

iv) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores en $\mathbb{R}^3$ con la base canónica le asigna la primera coordenada de su producto vectorial?

v) ¿Es un tensor la aplicación que a cada par de vectores en $\mathbb{R}^2$ con la base canónica le asigna el área del paralelogramo que determinan?

2) Demuestra que, fijada una base, todo tensor dos veces covariante es de la forma $T(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y}$ con A una matriz cuadrada.

3) Halla cuántas componentes nulas y cuántas no nulas tiene el tensor determinante. Estudia también cuántas son positivas.

4) Si multiplicamos tensorialmente unos cuantos elementos de $\mathcal{B}$ y otros de $\mathcal{B}^*$, halla cuántas componentes no nulas tiene el tensor resultante. Explica por qué todo tensor se puede escribir como combinación lineal de estos productos tensoriales y hazlo para el tensor que corresponde a la rotación de ángulo $\pi/2$ escogiendo $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2\}$ con $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ los vectores canónicos habituales.

5) Para $V = \mathbb{R}^3$ consideremos un tensor de tipo $(0, 3)$, otro de tipo $(1, 2)$ y otro de tipo $(2, 1)$, cuyas componentes, digamos ϵ_{ijk}, ϵ^i_{jk} y ϵ^{ij}_k, en la base canónica son: 0 si i, j, k no es una reordenación de $1, 2, 3$; 1 si i, j, k es una permutación par de $1, 2, 3$ (esto es, se ordena con un número par de intercambios) y -1 si i, j, k es una permutación impar de $1, 2, 3$. Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$, explica qué objetos matemáticos bien conocidos representan las cantidades $\epsilon^{ij}_k \partial F^k / \partial x^j$, $\epsilon^i_{jk} v^j w^k$ y $\epsilon_{ijk} u^i v^j w^k$.

6) Demuestra que el "tensor identidad" $T : (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que tiene componentes $T^i_j = \delta^i_j$ en la base canónica, conserva estas componentes en cualquier otra base.

7) El "tensor de Minkowski" $M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene componentes $-M_{11} = M_{22} = 1$, $M_{12} = M_{21} = 0$ en la base canónica. Encuentra un cambio de base no trivial (distinto de cambios de signo) que deje invariantes todas las componentes.

8) Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$ y sean g_{ij} las componentes del tensor métrico usual, es decir, $g_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$. Demostrar que $|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)| = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Indicación: Cambia a una base ortonormal.

9) El espín de un electrón es una especie de imán asociado a él y se representa con un vector unitario $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \in \mathbb{C}^2$ donde $|a|^2$ y $|b|^2$ indican las probabilidades de que al hacer un experimento notemos el polo norte arriba o abajo, respectivamente. Para dos electrones se representa como un tensor $(2, 0)$ complejo $a^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ donde $|a^{ij}|^2$ son las probabilidades de cada medición (p.ej. $|a^{12}|^2$ es arriba-abajo). Si $a^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{v} \otimes \vec{w}$, los electrones son de alguna manera independientes y se dice que no están *entrelazados*. Prueba que están entrelazados si y sólo si $\det(a^{ij}) \neq 0$, es decir, no lo están si y sólo si $\det(a^{ij}) = 0$. Nota: Para tres electrones el tensor es $(3,0)$ y no existe una caracterización sencilla.

10) Dado un sólido $V \subset \mathbb{R}^3$ de densidad ρ se define su tensor de inercia I como un tensor $(0,2)$ cuyas componentes son $I_{ij} = \rho \int_V \big(\delta_{ij}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - x_i x_j\big)$ donde $x_1,\ x_2,\ x_3$ indican las variables $x,\ y,\ z$. En física se prueba que el trabajo que cuesta girar V alrededor del origen es $\frac{1}{2}I(\vec{\omega},\vec{\omega})$ con $\vec{\omega}$ la velocidad angular: el vector que apunta en la dirección del eje de giro y cuya longitud es el número de radianes por segundo. Considera el disco $x^2+y^2 \leq 1$ con un grosor muy pequeño, ¿qué es más fácil, girarlo por el eje X o girarlo por el eje Z?

11) En la superficie esférica unidad en $\mathbb{R}^3$, $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ considera las cartas $(S^2 - \{\text{N}\}, \phi_{\text{N}})$ y $(S^2 - \{\text{S}\}, \phi_{\text{S}})$ que dan las proyecciones estereográficas en $z=0$ desde los polos norte N y sur S respectivamente. Halla una fórmula para ϕ_{N} y ϕ_{S} y comprueba que son cartas compatibles.

12) Estudia si son grupos (de Lie) los siguientes conjuntos de matrices con el producto (y la topología usual) y en caso afirmativo da un argumento, aunque sea intuitivo, para calcular la dimensión (real) de las variedades correspondientes:

i) $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

ii) $\big\{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \ :\ M \text{ corresponde a una rotación}\big\}$.

iii) $\Big\{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ :\ M = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ con } -1 < x < 1\Big\}$.

iv) $\big\{M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \ :\ MM^t = I\big\}$.

v) $\big\{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ :\ MM^\dagger = I,\ \det(M) = 1 \text{ con } M^\dagger = \text{traspuesta conjugada}\big\}$.

vi) $\big\{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ :\ MM^\dagger = I,\ \det(M) \neq i\big\}$.

13) Sea $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por un giro de ángulo α. Describe el efecto de la aplicación tangente sobre ∂_1 en los siguientes casos:

a) En ambas circunferencias se emplea la carta $(S^1 - \{(-1,0)\}, \phi_1)$ donde ϕ_1 asigna a cada punto el ángulo que determina con OX, normalizado en $(-\pi,\pi)$.

b) En la primera se emplea $(S^1 - \{(-1,0)\}, \phi_1)$ y en la segunda $(S^1 \cap \{x > 0\}, \phi_2)$ con $\phi_2(x,y) = y$.

14) Consideramos en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ las coordenadas cartesianas y en coordenadas polares. Expresa $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ en términos de $\frac{\partial}{\partial r}$ y $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Deduce de las relaciones $dx\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) = 1$, $dx\big(\frac{\partial}{\partial y}\big) = 0$ fórmulas para $dx\big(\frac{\partial}{\partial r}\big)$ y $dx\big(\frac{\partial}{\partial \theta}\big)$ y de ahí una expresión para dx en términos de dr y $d\theta$. ¿Se te ocurre cómo podrías haber llegado al resultado final sin apenas hacer cálculos?