EXAMEN FINAL ORDINARIO 31/05/2017 GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Apellidos y Nombre:...

....

Observaciones: Si muestras que tienes conocimientos suficientes en los tres primeros problemas, estarás aprobado por curso, incluso si la calificación no alcanza el 5. El último apartado del último ejercicio posiblemente resulte más difícil que el resto.

1) [1.5 puntos] Considera el tensor en $\mathbb{R}^2$ que en coordenadas polares viene dado por

$$T = \frac{\partial}{\partial\theta} \otimes dr.$$

Calcula su componente T_1^1 en coordenadas cartesianas en el punto $(x_0, y_0) = (3, 3)$.

2) [1.5 puntos] Calcula el símbolo de Christoffel Γ_{22}^2 correspondiente a la métrica definida en $\mathbb{R}^2$ mediante $(1 + y^2)dx^2 + e^{xy}dy^2$.

3) [1.5 puntos] Sea $\omega = e^{x+y}(\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx + (x + e^{x+y} \operatorname{sen} x)\, dy$. Calcula $\int_{S^1} i^*\omega$ donde $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ es la inclusión.

4) [1.5 puntos] Consideremos el semiplano de Poincaré con su métrica $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ que tiene como únicos símbolos de Christoffel no nulos: $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -y^{-1}$. Halla una f no idénticamente nula de modo que $V = f(y)\partial_1$ sea un transporte paralelo cuando se restringe a la curva $c(t) = (0, 1 + t)$.

5) Decide si son verdaderas o falsas en general las siguientes afirmaciones, dando una breve explicación.

a) [1 punto] Las simetrías en $\mathbb{R}^3$ que dejan fijo el origen forman una variedad de dimensión 2 (basta con explicaciones intuitivas).

b) [1 punto] Si se multiplican todas los componentes de una métrica por 4, entonces también los símbolos de Christoffel se multiplican por 4.

c) [1 punto] El tensor de curvatura cumple $R_{ikl}^i = 0$.

d) [1 punto] Existe un campo de vectores C^∞ en S^2 que solo se anula en el polo norte.