Apellidos y Nombre:...

....

1) Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, dando una breve explicación.

a) [1 punto] Toda 2-forma diferencial ω en una variedad satisface $\omega \wedge \omega = 0$.

b) [1.5 puntos] Si R^i_{jkl} son las componentes del tensor de Riemann y g_{ij} las de la métrica, se cumple $g^{kl}R^i_{jkl} = 0$.

c) [1.5 puntos] Sea $H^{\pm} = S^2 \cap \{\pm z \geq 0\}$. Si $f : S^2 \longrightarrow S^2$ cumple $f(H^+) = H^+$, $f(H^-) = H^-$ y $f(\vec{x}) = -\vec{x}$ para $\vec{x} \in H^+ \cap H^-$, entonces tiene al menos dos puntos fijos.

2) [2 puntos] En el abierto $\mathcal{U}$ de S^2 formado por los puntos con $0 < \theta < \pi/4$, se considera la forma diferencial $\omega = d\theta \wedge d\varphi$. Calcula $\omega\big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\big)$ con x e y las cordenadas cartesianas habituales y deduce de ello que ω no puede definirse con continuidad en el polo norte. Nota: $(\arctan t)' = (1+t^2)^{-1}$ y $(\operatorname{arc\,sen} t)' = (1-t^2)^{-1/2}$.

3) a) [3 puntos] Considera la forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\omega = \big(2xz - z\cos(yz)\big)\, dx \wedge dy + \big(e^x - x^2\big)\, dy \wedge dz + \big(ye^x - y\cos(yz)\big)\, dx \wedge dz$$

Demuestra que para cualquier $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se cumple $\int_{S^2} (f \circ i)^* \omega = 0$ donde $i : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión.

b) [1 punto] Decide si existe una $f : S^1 \longrightarrow S^1$ sobreyectiva tal que $\int_{S^1} f^*\eta = 0$ para toda $\eta \in \Omega^1(S^1)$. En caso afirmativo da un ejemplo y en caso negativo da una prueba.

Soluciones

1) a) Falso. En $\mathbb{R}^4$ consideramos $\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dt$. Entonces $\omega \wedge \omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt + dz \wedge dt \wedge dx \wedge dy = 2\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$.

b) Verdadero. Como (g_{ij}) es una matriz simétrica, (g^{kl}) también lo es y $g^{kl}R^i_{jkl} = \frac{1}{2}\big(g^{kl}R^i_{jkl} + g^{lk}R^i_{jkl}\big) = \frac{1}{2}g^{kl}\big(R^i_{jkl} + R^i_{jlk}\big) = 0$ porque R^i_{jkl} es antisimétrico en k y l.

c) Verdadero. Sean p_N y p_S las proyecciones estereográficas por N y S, entonces $F_1 = p_S \circ f \circ p_S^{-1}$ y $F_2 = p_N \circ f \circ p_N^{-1}$ aplican el disco cerrado unidad D en él mismo y no tienen puntos fijos en el borde (allí $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$). Por el teorema de Brouwer existen $q_1, q_2 \in \mathrm{Int}(D)$ fijos respectivamente por F_1 y F_2, por tanto $p_S^{-1}(q_1)$ y $p_N^{-1}(q_2)$ son puntos fijos de f y distintos porque están en diferentes hemisferios.

2) De $x = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta$, $y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, se deduce $\varphi = \arctan(y/x)$ y $\theta = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2+y^2})$. Así pues

$$d\theta = f(x,y)\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad d\varphi = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},$$

con $f(x,y) = 1/\sqrt{1-x^2-y^2}$. Entonces

$$\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big) = \begin{vmatrix} d\theta\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) & d\theta\big(\frac{\partial}{\partial y}\big) \\ d\varphi\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) & d\varphi\big(\frac{\partial}{\partial y}\big) \end{vmatrix} = \frac{f(x,y)}{\big(x^2+y^2\big)^{3/2}} \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

que es singular cuando $(x,y) \to (0,0)$.

3) a) Sabemos que $(f \circ i)^* = i^* \circ f^*$ y por el teorema de Stokes, si B es la bola unidad

$$\int_{S^2} i^*(f^*\omega) = \int_B d(f^*\omega) = \int_B f^* d\omega$$

y el siguiente cálculo prueba que $d\omega = 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\big(2xz - z\cos(yz)\big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(e^x - x^2\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(ye^x - y\cos(yz)\big) \\ &= \big(2x - \cos(yz) + zy\operatorname{sen}(yz)\big) + \big(e^x - 2x\big) - \big(e^x - \cos(yz) + yz\operatorname{sen}(yz)\big) = 0. \end{aligned}$$

b) Tomemos por ejemplo $f : \big(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\big) \longmapsto \big(\cos(\pi\operatorname{sen}\theta), \operatorname{sen}(\pi\operatorname{sen}\theta)\big)$ en la carta $\theta(-\pi,\pi)$ que se extiende a $f(0,-1) = (1,0)$. Claramente es sobreyectiva porque la imagen de $\pi\operatorname{sen}\theta$ es $[-\pi,\pi]$. Si $\eta = F(\theta)\,d\theta$ y G es tal que $G' = F$, se tiene

$$\int_{S^2} f^*\eta = \int_{-\pi}^{\pi} F(\pi\operatorname{sen}\theta)\,d(\pi\operatorname{sen}\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\pi\operatorname{sen}\theta)(\pi\operatorname{sen}\theta)'\,d\theta = G(0) - G(0) = 0.$$