Apellidos y Nombre:. . . . .

. . . .

1) Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, dando una breve explicación.

a) [1 punto] Toda 2-forma diferencial ω en una variedad satisface $\omega \wedge \omega = 0$.

b) [1.5 puntos] Si R^i_{jkl} son las componentes del tensor de Riemann y g_{ij} las de la métrica, se cumple $g^{kl} R^i_{jkl} = 0$.

c) [1.5 puntos] Sea $H^{\pm} = S^2 \cap \{\pm z \ge 0\}$. Si $f : S^2 \longrightarrow S^2$ cumple $f(H^+) = H^+$, $f(H^-) = H^-$ y $f(\vec{x}) = -\vec{x}$ para $\vec{x} \in H^+ \cap H^-$, entonces tiene al menos dos puntos fijos.

2) [2 puntos] En el abierto $\mathcal{U}$ de S^2 formado por los puntos con $0 < \theta < \pi/4$, se considera la forma diferencial $\omega = d\theta \wedge d\varphi$. Calcula $\omega\big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\big)$ con x e y las cordenadas cartesianas habituales y deduce de ello que ω no puede definirse con continuidad en el polo norte. Nota: $(\arctan t)' = (1+t^2)^{-1}$ y $(\operatorname{arc\,sen} t)' = (1-t^2)^{-1/2}$.

3) a) [3 puntos] Considera la forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\omega = \big(2xz - z\cos(yz)\big)\, dx \wedge dy + \big(e^x - x^2\big)\, dy \wedge dz + \big(ye^x - y\cos(yz)\big)\, dx \wedge dz$$

Demuestra que para cualquier $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se cumple $\int_{S^2} (f \circ i)^* \omega = 0$ donde $i : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión.

b) [1 punto] Decide si existe una $f : S^1 \longrightarrow S^1$ sobreyectiva tal que $\int_{S^1} f^*\eta = 0$ para toda $\eta \in \Omega^1(S^1)$. En caso afirmativo da un ejemplo y en caso negativo da una prueba.