Apellidos y Nombre: ....

....

1) Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, dando una breve explicación.

a) [1 punto] Si todos los símbolos de Christoffel se anulan, entonces $\nabla_X Y = \big(X^i \partial_i Y^j\big)\partial_j$.

b) [1 punto] Si $V(t) \neq 0$ es un transporte paralelo a lo largo de una curva, entonces $e^t V(t)$ no es trasporte paralelo.

2) En $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ se considera la métrica $x^{-2}dx^2 + x^{-1}dy^2$.
a) [3 puntos] Calcula el símbolo de Christoffel Γ_{11}^1.
b) [2 puntos] Sabiendo que hay una geodésica horizontal con punto inicial $p = (1,1)$ y vector inicial $2\partial_1$, halla su ecuación explícita. Nota: No se pide demostrar la existencia de tal geodésica, se puede dar por supuesta.

3) Sea $F : M \longrightarrow N$ con $dF|_p : T_p(M) \longrightarrow T_{F(p)}(N)$ inyectiva para cada $p \in M$ y G una métrica definida positiva en N.
a) [2 puntos] Prueba que el *pullback* F^*G es una métrica en M. Nota: Recuerda la definición de *pullback* $F^*G(V,W) = G\big(dF(V), dF(W)\big)$.
b) [1 punto] ¿Es cierto en general que F transforma geodésicas de M en geodésicas de N?

Soluciones

1) a) Verdadero.
Es consecuencia de la igualdad general

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i\partial_i} Y = X^i \nabla_i Y = X^i\big(\partial_i Y^k + \Gamma_{il}^k Y^l\big)\partial_k.$$

b) Verdadero.
Se tiene

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D\big(e^t V(t)\big)}{dt} \overset{(*)}{=} \frac{de^t}{dt}V(t) + e^t\frac{DV}{dt} = e^t V(t) \neq 0.$$

La justificación detallada de (*) es $\frac{d(e^tV)}{dt} + \Gamma_{ij}^k e^t V^i \frac{dx^j}{dt} = \frac{de^t}{dt}V(t) + e^t\Big(\frac{dV}{dt} + \Gamma_{ij}^k V^i \frac{dx^j}{dt}\Big)$.

2) a) El lagrangiano es $L = x^{-2}\dot{x}^2 + x^{-1}\dot{y}^2$. Entonces

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x^{-3}\dot{x}^2 - x^{-2}\dot{y}^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = \frac{d}{dt}\big(2x^{-2}\dot{x}\big) = -4x^{-3}\dot{x}^2 + 2x^{-2}\ddot{x}.$$

Igualando, se sigue $\ddot{x} - x^{-1}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 = 0$. El símbolo Γ_{11}^1 es el coeficiente de $\dot{x}^2$, esto es, $-x^{-1}$.

b) Por la conservación de la energía el lagrangiano es constante a lo largo de las geodésicas: $x^{-2}\dot{x}^2 = \mathsf{cte}$, de aquí $x^{-1}\dot{x} = \mathsf{cte}$ que implica $x(t) = Ae^{Bt}$. De las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 2$ se sigue $A = 1$ y $B = 2$. En definitiva $\big(x(t), y(t)\big) = (e^{2t}, 1)$.

3) a) Como $G(X,Y) = G(Y,X)$, la simetría de F^*G está asegurada. Si la matriz de componentes de F^*G fuera singular en p, existiría $V \in T_p(M)$ tal que $F^*G(V,V) = 0$ (escogiéndolo del núcleo) y entonces $X = dF|_p(V) \in T_{F(p)}(N)$ sería un vector no nulo (por la inyectividad) tal que $G(X,X) = G\big(dF|_p(V), dF|_p(V)\big) = 0$, lo que contradice que la métrica sea definida positiva.

b) No, por ejemplo la inclusión $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene como imagen una circunferencia y los arcos de circunferencia no son geodésicas de $\mathbb{R}^2$ (con ninguna parametrización) pero sí lo son en S^1 con la métrica usual.