1) [3 puntos] Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, dando una pequeña explicación.

a) Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano $L(t,q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}Kq^2$ con $m, K \in \mathbb{R}^+$, equivalen a $\ddot{q} + \frac{K}{m}q = 0$.

b) En $\mathbb{R}^2$ con la carta trivial (coordenadas cartesianas), se cumple $dx \otimes dy = dy \otimes dx$.

c) Si $f : M \longrightarrow N$ es una función C^∞ entre variedades y f es inyectiva, la aplicación tangente $T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ es inyectiva para cada $p \in M$.

2) [3 puntos] Expresa el campo de vectores tangentes $(x^2+y^2)\dfrac{\partial}{\partial x}$ de $\mathbb{R}^2$ (con las coordenadas cartesianas) en la carta en coordenadas polares.

3) [3 puntos] Si T es un tensor de tipo $(1,1)$ en una variedad, se define su traza en cada punto como T^i_i. Demuestra que no depende de la carta elegida.

4) [1 punto] ¿Qué dimensión tiene la variedad (subvariedad de $\mathbb{R}^9$) formada por las matrices simétricas reales 3×3 con polinomio característico $\lambda^2(\lambda-1)$? Puedes razonar intuitivamente.

Soluciones

1) a) Verdadero.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) = m\ddot{q}, \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial q} \ \Leftrightarrow\ m\ddot{q} = -Kq \ \Leftrightarrow\ \ddot{q} + \frac{K}{m}q = 0.$$

b) Falso.

$$dx \otimes dy\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big) = dx\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)dy\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big) = 1 \cdot 1, \qquad dy \otimes dx\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big) = dy\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)dx\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big) = 0 \cdot 0.$$

b) Falso. Uno de los contraejemplos más sencillos es $M = N = \mathbb{R}$ con $f(x) = x^3$. En el origen la derivada, y por tanto la aplicación tangente, es nula.

2) Usando las fórmulas $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ y las reglas de transformación de los vectores, que son tensores de tipo $(1,0)$, se tiene

$$(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} = r^2\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big) = r^2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} - r^2\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = r^2\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

3) Por las reglas de transformación de los tensores, sabemos que que si T^i_j y $\widetilde{T}^i_j$ son las componentes en dos cartas con funciones coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ y $(y^1,\dots,y^n)$, respectivamente,

$$T^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\widetilde{T}^k_l \;\Rightarrow\; T^i_i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\widetilde{T}^k_l \;\Rightarrow\; T^i_i = \frac{\partial y^l}{\partial y^k}\widetilde{T}^k_l = \delta^l_k\widetilde{T}^k_l = \widetilde{T}^k_k.$$

Para la primera implicación se toma $i=j$ (se suma en $i=j$). La segunda es la regla de la cadena.

4) Cada matriz A de la variedad diagonaliza en base ortonormal $\{\vec{u},\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ con $A\vec{u}=\vec{u}$ y $A\vec{v}_j=\vec{0}$ para $j=1,2$. Por tanto, la aplicación lineal L que corresponde a A es $L(\vec{x}) = \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{x}) = (\vec{u}\cdot\vec{x})\vec{u}$ que está biunívocamente determinada por la dirección de $\vec{u}$, lo que da dimensión dos (un punto en S^2 identificando opuestos).

Criterios y errores frecuentes

1) Decir verdadero o falso no cuenta nada si no va acompañado de una explicación.

b) Algunos confunden $dx\otimes dy$ con la forma diferencial $dx\wedge dy$ que todavía no ha aparecido en el curso.

c) Algunos creen que $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ inyectiva implica $Dg:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ inyectiva y les parece que se deduce del teorema del rango o algo similar pero eso no es cierto.

2) Cosas como $\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^{-1}$ además de falsas son muy, muy feas. El teorema de la función inversa dice que la matriz jacobiana de la inversa es la inversa de la jacobiana pero una matriz no se invierte tomando el inverso de cada elemento.

3) Aquí hay un error que después de recapacitar no he penalizado pero que es importante tener claro. Lo ilustro primero con un ejemplo. Si multiplicamos $\sum_i a_ix^i$ por $\sum_i b_iy^i$ el resultado es $\sum_{i,j} a_ib_jx^iy^j$ que es bien distinto de $\sum_i a_ib_ix^iy^i$. El convenio de sumación nos debería proteger de este error porque $a_ib_ix^iy^i$ no tiene un sentido definido, debo sumar en subíndices y superíndices iguales ¿pero cómo los agrupo? Si uno lo "define" como sumar en todos al tiempo, al multiplicar a_ix^i por b_iy^i no se obtiene $a_ib_ix^iy^i$. Volviendo al problema, varios escriben $\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\widetilde{T}^k_k$ en lugar de $\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\widetilde{T}^k_l$.

4) Más o menos ha habido dos enfoques del problema, uno con proyecciones y autovectores (como en la solución anterior) y otro con las ecuaciones correspondientes a los coeficientes del polinomio característico. Todos menos una persona se han equivocado pero como considero que los del primer enfoque se quedan cerca de la solución tienen un 0.75. Con el segundo era bastante más difícil obtener el resultado. Algunos llegan a las ecuaciones correctas pero no se dan cuenta de que restringen más de lo que parece, tienen 0.5. Típicamente una ecuación quita un grado de libertad pero cosas como $x^2+y^2+z^2=0$ pasan de tres variables a ninguna.