
Instrucciones: El problema es voluntario. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. Una solución correcta completa añade 0.2 a la calificación. La solución es esencialmente un cálculo.

Plazo y modo de entrega: Hasta el día del examen final de la convocatoria ordinaria, preferentemente en papel. Si no se asiste al examen se puede enviar por correo electrónico, siempre enviaré confirmación de que lo he recibido.

---

1) El campo electromagnético se representa por dos campos vectoriales, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, en $\mathbb{R}^3$ que en ausencia de cargas y corrientes están gobernados por las *ecuaciones de Maxwell*

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Consideramos $\mathbb{R}^4$ con la carta identidad. Sea $*$ la aplicación f-lineal en $\Omega^2(\mathbb{R}^4)$ tal que $*(dx^i \wedge dx^j) \wedge dx^i \wedge dx^j = \pm dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$ para $i \neq j$ donde se escoge el signo $-$ si y sólo si $i = 1$ o $j = 1$. Por ejemplo, $*(dx^3 \wedge dx^4) = dx^1 \wedge dx^2$ y $*(dx^1 \wedge dx^3) = dx^2 \wedge dx^4$. Comprueba que definiendo el *tensor de Faraday* $F = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ con $(F_{21}, F_{31}, F_{41}) = \vec{E}$, $(F_{34}, F_{42}, F_{23}) = \vec{B}$ y el resto de los F_{ij} nulos, las ecuaciones de Maxwell equivalen a $dF = d * F = 0$ con la notación $(t, x, y, z) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

Comentario: El tensor F aparece en el famoso artículo de Einstein sobre la relatividad especial. El operador $*$ es la llamada *estrella de Hodge* que desempeña un papel importante en geometría y topología. Se puede definir en una variedad riemanniana orientable de dimensión n para establecer una dualidad entre $\Omega^k(M)$ y $\Omega^{n-k}(M)$.