
Instrucciones: El problema es voluntario. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. Una solución correcta completa añade 0.4 a la calificación. Una solución especialmente breve y original se podrá premiar con una puntuación mayor.

Plazo y modo de entrega: Hasta el 4 de mayo (incluido), preferentemente en papel. Si, por el contrario, se usa el correo electrónico, enviaré confirmación.

---

1) Dado un campo de vectores V en una variedad compacta con métrica G, se define su *flujo* como la función $\Phi_t : M \longrightarrow M$ que asigna a cada $p \in M$ el valor de $c(t)$, la curva integral de V que pasa por p, esto es, $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = V(p)$. En otras palabras, el flujo dice cómo se recolocan las partículas (puntos) que conforman una variedad al pasar un tiempo t si se les asigna velocidad V. En este problema, se excluye en lo sucesivo el campo nulo en todos los puntos (así Φ_t puede tener puntos fijos pero no todos para todo t).

Se dice que V es un *campo de Killing* si se cumple $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\Phi_t^* G) = 0$. Intuitivamente esto significa que la métrica no cambia en la dirección V. De hecho es común, sobre todo en física, decir que V es una *isometría infinitesimal*.

a) Prueba que V es campo de Killing si y solo si verifica $V^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i V^k + g_{ik} \partial_j V^k = 0$.

b) Siguiendo la idea intuitiva, busca un campo de Killing en el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ con la métrica usual y comprueba que satisface la ecuación del apartado anterior. Es importante comprobar que está bien definido en todo el elipsoide, no solo en un abierto suyo.

Nota: Para cada t dado, $\Phi_t^* G$ es el pullback de un tensor y por tanto un tensor. Es parte del problema dar un significado coherente a $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\Phi_t^* G)$.