1) En este problema veremos que es posible determinar la "forma" de las geodésicas de cualquier variedad riemanniana bidimensional con una métrica del tipo $\big(f(u)+g(v)\big)\big(du^2+dv^2\big)$. Sean $F_\pm(x)$ y $G_\pm(x)$ primitivas de $\big(f(x)-K\big)^{\pm 1/2}$ y $\big(g(x)+K\big)^{\pm 1/2}$, respectivamente, para cierta constante K.

a) Prueba que al emplear las nuevas coordenadas $a = F_+(u)-\eta G_+(v)$, $b = F_-(u)+\eta G_-(v)$ con $\eta \in \{-1, 1\}$ (cualquiera de las dos elecciones), hay geodésicas con b constante.

b) Sea $\big(u(t), v(t)\big)$ una geodésica con la carta original definida en un pequeño entorno de $t = 0$. Prueba que si ajustamos K y η de modo que se cumpla la relación

$$\frac{\dot u(0)}{\sqrt{f(u(0))-K}} + \eta\frac{\dot v(0)}{\sqrt{g(v(0))+K}} = 0,$$

entonces se tiene que $F_-\big(u(t)\big) + \eta G_-\big(v(t)\big)$ es constante.

c) Como aplicación de este resultado, demuestra que las geodésicas no verticales del semiplano de Poincaré (último problema de la Hoja 2), describen arcos de circunferencia con centro en el eje X.

Solución:

a) Por las definiciones de $F_\pm$ y $G_\pm$ se tiene $da = (f-K)^{1/2}\ du - \eta(g+K)^{1/2}\ dv$ y $db = (f-K)^{-1/2}\ du + \eta(g+K)^{-1/2}\ dv$, donde se ha abreviado $f = f(u)$, $g = g(v)$. Si multiplicamos db por $(f-K)^{1/2}(g+K)^{1/2}$ entonces se obtiene algo como da salvo el orden y signo de los coeficientes. Esta observación es suficiente para ver que al elevar al cuadrado se cancelan los dobles productos y se tiene[1]

$$da^2 + (f-K)(g+K)\ db^2 = (f-K+g+K)\ du^2 + (g+K+f-K)\ dv^2 = (f+g)(du^2+dv^2).$$

Para deducir las ecuaciones de las geodésicas debemos considerar el lagrangiano $L = \dot a^2 + \big(f(u)-K\big)\big(g(v)+K\big)\dot b^2$ donde $u = u(a,b)$, $v = v(a,b)$ a través de la relación que define el cambio de coordenadas. Está claro que $\partial L/\partial a$, $\partial L/\partial b$ y $\frac{d}{dt}\big(\partial L/\partial \dot b\big)$ se anulan para $b = b_0$

[1] Es cierto que éste es un truco a posteriori que seguramente solo es natural después de ensayar los cálculos directos. Sin embargo, desde mi punto de vista, los cálculos directos completos no requieren tantos pasos como he visto en algunas de las soluciones entregadas.

constante. Así la segunda ecuación de Euler-Lagrange es trivial y la primera da $\ddot{a} = 0$, de modo que con estas coordenadas $a(t) = \lambda_0 t + a_0$, $b(t) = b_0$ define una geodésica.

b) En el apartado anterior tomemos la geodésica $\gamma(t)$ con $a_0 = F_+\big(u(0)\big) - \eta G_+\big(v(0)\big)$ y $b_0 = F_-\big(u(0)\big) + \eta G_-\big(v(0)\big)$. Evidentemente $\gamma(t)$ y $\big(u(t), v(t)\big)$ tiene el mismo punto inicial p (expresado en cada uno de los sistemas de coordenadas) y la condición del enunciado asegura que siempre podemos hacer coincidir los vectores iniciales ajustando λ_0 ya que la imagen de $\dot{u}(0)\frac{\partial}{\partial u}\big|_p + \dot{v}(0)\frac{\partial}{\partial v}\big|_p$ por la aplicación tangente del cambio (la jacobiana) tiene segunda coordenada nula. La unicidad de las geodésicas asegura que ambas son iguales[2], en particular $F_-\big(u(t)\big) + \eta G_-\big(v(t)\big)$ es la constante b_0.

c) La elección natural es $f \equiv 0$ y $g(x) = x^{-2}$. Por motivos estéticos escribamos $-K = A^{-2}$, $A > 0$, entonces

$$F_-(u) = Au, \qquad G_-(v) = \int \frac{dv}{\sqrt{v^{-2} - A^{-2}}} = \int \frac{Av\, dv}{\sqrt{A^2 - v^2}} = -A\sqrt{A^2 - v^2}.$$

Está claro que si $\dot{u}(0) \neq 0$ se puede ajustar A y η de modo que $\sqrt{A^2/(v(0))^2 - 1} = -\eta\dot{v}(0)/\dot{u}(0)$ y esto equivale a la condición del apartado b). Por tanto para $\dot{u}(0) \neq 0$ se tiene que $Au - A\sqrt{A^2 - v^2}$ es constante, digamos $u - \sqrt{A^2 - v^2} = B$. Despejando, $A^2 = (u-B)^2 + v^2$ que es una circunferencia[3] centrada en $(B, 0)$. La condición $\dot{u}(0) \neq 0$ implica que el vector tangente inicial no es vertical. Para $\dot{u}(0) = 0$ se tendrían las geodésicas verticales halladas en el ejercicio 16-b).

Comentarios: Si quieres buscar más información relacionada con el problema, las métricas como las de este ejercicio se llaman *métricas de Liouville*. La posibilidad de describir todas las geodésicas como curvas de nivel está relacionado con que el llamado *flujo geodésico* sea *integrable*. Un ejemplo destacado son las superficies de revolución en $\mathbb{R}^3$. En ese caso la fórmula que define las geodésicas sin atender a su parametrización es (equivalente a) lo que se llama *relación de Clairaut* que muy probablemente apareció en segundo. Una alternativa para obtener la aplicación es generalizar 16-c) a las transformaciones $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ con $ad - bc = 1$ que cuando actúan sobre la geodésica vertical con $x = 0$ dan lugar a todas las geodésicas.

[2] Esto es un pequeño atajo con respecto a escribir de nuevo las ecuaciones de Euoler-Lagrange, que es lo que aparece en casi todas las soluciones.

[3] Realmente la geodésica se puede continuar a lo largo de toda la semicircunferencia permitida por $v > 0$ aunque, como ya indiqué, eso no era parte del problema.