Problema especial 1 Geometría y Topología. 2016-2017

Instrucciones: El problema es voluntario. Se puede realizar individualmente o en grupo pero en cualquier caso las redacciones deben ser personales y distintas. Una solución correcta completa añade 0.3 a la calificación. Una solución especialmente breve y original se podrá premiar con una puntuación mayor.

Plazo y modo de entrega: Hasta el 16 de marzo (incluido), preferentemente en papel. Si, por el contrario, se usa el correo electrónico, enviaré confirmación.

---

1) En este problema veremos que es posible determinar la "forma" de las geodésicas de cualquier variedad riemanniana bidimensional con una métrica del tipo $\big(f(u)+g(v)\big)\big(du^2+dv^2\big)$. Sean $F_\pm(x)$ y $G_\pm(x)$ primitivas de $\big(f(x)-K\big)^{\pm 1/2}$ y $\big(g(x)+K\big)^{\pm 1/2}$, respectivamente, para cierta constante K.

a) Prueba que al emplear las nuevas coordenadas $a = F_+(u) - \eta G_+(v)$, $b = F_-(u) + \eta G_-(v)$ con $\eta \in \{-1, 1\}$ (cualquiera de las dos elecciones), hay geodésicas con b constante.

b) Sea $\big(u(t), v(t)\big)$ una geodésica con la carta original definida en un pequeño entorno de $t = 0$. Prueba que si ajustamos K y η de modo que se cumpla la relación

$$\frac{\dot{u}(0)}{\sqrt{f(u(0)) - K}} + \eta \frac{\dot{v}(0)}{\sqrt{g(v(0)) + K}} = 0,$$

entonces se tiene que $F_-\big(u(t)\big) + \eta G_-\big(v(t)\big)$ es constante.

c) Como aplicación de este resultado, demuestra que las geodésicas no verticales del semiplano de Poincaré (último problema de la Hoja 2), describen arcos de circunferencia con centro en el eje X.