**1)** Pedimos a 1000 personas que nos digan un número del 0 al 999. Calcula la probabilidad de que exactamente dos personas hayan elegido el número que forman los tres últimos dígitos de la lotería de mañana. Rehaz el problema aproximando por una distribución de Poisson y compara los resultados numéricos.

**2)** Un lote de piezas contiene una proporción de ellas defectuosas. Para realizar un control de calidad se seleccionan $n$ piezas y se denomina $X$ el número de las encontradas defectuosas. Si se examinan $n = 80$ piezas y se encuentran dos defectuosas, ¿cuál es la proporción más verosímil de piezas defectuosas en el lote total: el $1\,\%$, el $4\,\%$ ó el $7\,\%$?

**3)** Tiramos una moneda 10000 veces. Resuelve los siguientes apartados dando por buena la aproximación por una distribución normal:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan más de 5100 caras?
b) ¿A partir de qué número de caras esta probabilidad pasa a ser menor que el $1\,\%$?
c) Justifica por qué al tirar la moneda $N$ veces (con $N$ grande), típicamente la diferencia entre caras y cruces es comparable a $\sqrt{N}$

**4)** [14] El cociente de inteligencia es una variable aleatoria que se distribuye según una normal $N(100, 16)$.
a) Calcula la probabilidad de que un individuo tenga un cociente superior a 120.
b) Supongamos que para ser admitido en cierta carrera universitaria se pide un cociente superior a 110. Halla la probabilidad de que uno de los admitidos tenga cociente superior a 120.

**5)** [4] El número de erratas por página en un libro se supone que sigue una distribución de Poisson. En una muestra de 95 páginas se han observado las siguientes frecuencias:

| número de fallos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| frecuencia | 40 | 30 | 15 | 7 | 2 | 1 |

¿Cómo se podría estimar el parámetro $\lambda$ de la distribución de Poisson? Con dicho $\lambda$, halla la probabilidad de que en una página seleccionada al azar haya alguna errata y la de que haya más de tres.

**6)** [4] Sea $(X_1, \dots, X_N)$ una muestra aleatoria de una población $X$ con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\theta^2}\right) \quad \text{si } x > 0\,, \quad (\theta > 0) \quad \text{y cero en el resto.}$$

Halla el estimador de máxima verosimilitud de $\theta$.

Los números entre corchetes indican problemas del libro de J. de la Horra, a veces con leves cambios.
En algunos problemas se necesita una tabla de la normal estándar, por ejemplo:
`https://www.math.ucdavis.edu/~soshniko/135a/materials/standardnormaltable.pdf`

**7)** Cuando Boltzmann introdujo la estadística de Maxwell-Boltzmann (el número de moléculas de un gas con energía $E$ es proporcional a $e^{-E/kT}$), utilizó la analogía de una urna infinita llena de papeles con números naturales al azar. En un ejemplo de su trabajo considera que 7 moléculas corresponderían a escoger 7 papeles con números que pueden variar entre 0 y 7. Dice que un resultado está en la clase $p_1 p_2 \dots p_7$ si al ordenar de menor a mayor los números de los papeles resulta justamente $p_1 p_2 \dots p_7$.

a) Justifica la frase de Boltzmann "La razón entre el número de resultados que están en la clase 0000007 y los que están en la clase 0000016 es 7/42".

b) También afirma que hay 420 elementos en la clase 0001123, ¿sabrías explicar por qué?

c) Halla las probabilidades de que los siete papeles extraídos estén en cada una de las clases anteriores.

**8)** [5] Sea $(X_1, \dots, X_N)$ una muestra aleatoria de una población $X$ con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \theta x^{-\theta-1} \quad \text{si } x > 1\,, \quad (\theta > 0) \quad \text{y cero en el resto.}$$

a) Comprueba que realmente $f_\theta$ es función de densidad.

b) Halla el estimador de máxima verosimilitud de $\theta$.

**9)** Sabemos que cierta variable aleatoria sigue una distribución de Poisson. Extraemos una muestra que resulta ser $(0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 3)$. ¿Cómo estimarías $P(X > 2)$?

**10)** Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas explicando tus respuestas:

a) Si $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim N(0, 5)$, entonces $X_1 < 0.4$ es menos probable que $-3 < X_2 < 9$.

b) Para aproximar el número de unos al tirar un dado 6000 veces, hay que usar una distribución $N\big(1000, \sqrt{5000}\big)$.

c) La probabilidad de que al tirar dos millones de veces una moneda salgan exactamente un millón de cruces se aproxima bien con una distribución de Poisson.

d) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ alcanza un máximo en $x = x_0$ entonces lo mismo ocurre con $\log f$.