1) Elegimos al azar un número real en $[1/2, 8]$. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que su cuadrado? ¿y de que cumpla $x^2 - 5x + 4 > 0$?

2) La vida útil V en años de cierto producto perecedero es una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$. Calcula la probabilidad de que la vida útil esté entre uno y dos años. Calcula también la probabilidad de que sea mayor que $\log 2$ años.

3) La variable aleatoria que da la distancia al centro en centímetros cuando se lanza un dardo a una diana tiene como función de densidad

$$f(x) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\pi(1 + \alpha x^2)} \quad \text{para} \quad x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad f(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$

donde $\alpha > 0$ es una constante que depende de la puntería del lanzador (Nota: Esto es una simplificación con respecto al modelo matemático comúnmente aceptado).

a) Comprueba que f es función de densidad. (Indicación: recuerda que $\int_0^\infty dx/(1 + x^2) = \arctan \infty - \arctan 0 = \pi/2$).

b) Para un lanzador de puntería $\alpha = 3/16$, ¿cuál es la probabilidad de que un dardo se quede a más de 4 cm del centro?

c) ¿Cuántas dardos debería emplear el lanzador anterior para tener una probabilidad mayor del 99 % de que al menos uno de ellos quede a distancia menor que 4 cm del centro?

d) Los lanzadores con más puntería, ¿tienen α mayor o menor?

4) Halla la función de distribución, la esperanza $E[X]$ y varianza $V[X]$, de una variable aleatoria cuya función de densidad vale $1/2$ si $1 < |x| < 2$ y cero en el resto.

5) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x(2 - x), & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Calcula el valor de la constante α y después halla la esperanza $E[X]$ y la varianza $V[X]$.

6) Los principios de la mecánica cuántica aseguran que la función de distribución de la distancia desde el núcleo (en metros) a la que se detecta el electrón del orbital $1s$ en un átomo de hidrógeno es $F(x) = 1 - (2a^2x^2 + 2ax + 1)e^{-2ax}$ si $x \geq 0$ y $F(x) = 0$ si $x < 0$ donde $a = 1.8897 \cdot 10^{10}$ es el inverso del radio de Bohr (en metros).

a) ¿Cuál es la probabilidad de detectar el electrón a distancia mayor que cinco veces el radio de Bohr, esto es, $x > 5a^{-1}$?

b) Halla la función de densidad simplificándola lo más posible.

Los números entre corchetes indican problemas del libro de J. de la Horra, a veces con leves cambios.

c) Sabiendo que $\int_0^\infty t^3 e^{-2t}\,dt = 3/8$, comprueba que la distancia promedio al electrón (la esperanza) es $3/(2a) = 7.9377\cdot 10^{-11} m$.

7) Después de los trabajos de Maxwell y Boltzmann se sabe que la función de densidad de las velocidades en metros por segundo de las moléculas de un gas es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\lambda^3 x^2 e^{-\lambda^2 x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{m}{2k_B T}}$$

donde m es la masa en kilogramos, $k_B = 1.3806\cdot 10^{-23}$ es la constante de Boltzmann y T es la temperatura en grados Kelvin.

a) Calcula la esperanza. Indicación: Integra por partes con $u = x^2$, $dv = xe^{-\lambda^2 x^2}$ que permite tomar $v = -\frac{1}{2}\lambda^{-2}e^{-\lambda^2 x^2}$.

b) Para el hidrógeno H_2 se tiene $m = 3.3448\cdot 10^{-27}$ y para el helio He, $m = 6.6468\cdot 10^{-27}$. Con la fórmula del apartado anterior calcula las velocidades medias de las moléculas para $T = 20°\text{C} = 293.15°\text{K}$ y para $T = 586.30°\text{K}$.

c) Sabiendo que $\int_0^\infty t^4 e^{-t^2}\,dt = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$, halla la varianza para el H_2 y para el He en función de la temperatura T.

d) [opcional] ¿Sabrías dar alguna razón química-termodinámica por la que sea natural que las moléculas de hidrógeno a cierta temperatura se comporten casi igual que las de helio al doble de temperatura?

8) Calcula $E[X+Y]$, $E[2XY]$ y $V[2X-Y]$ donde X e Y son variables aleatorias independientes con funciones de densidad f y g respectivamente, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

9) [§5.8] Dos sustancias, A y B, se encuentran en la sangre en cantidades X e Y, respectivamente. Estas cantidades varían de un individuo a otro. La densidad conjunta de ambas es $f(x,y) = \frac{2}{81}xy^2$ si $0 < x < 3$ y $0 < y < 3$ mientras que $f(x,y) = 0$ en el resto de los casos.

a) Calcula la esperanza de Y.

b) Halla la probabilidad de que un individuo tomado al azar tenga más sustancia A que B.

c) ¿Son independientes X e Y?

10) Determina razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Las funciones de densidad toman valores entre 0 y 1.

b) Para cualquier función de distribución $F(20) \geq F(17)$.

c) Para cualquier función de densidad $f(20) \geq f(17)$.

d) Si X e Y son independientes $E[XY] = E[X]E[Y]$.