1) Elegimos al azar un número real en $[1/2, 8]$. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que su cuadrado? ¿y de que cumpla $x^2 - 6x + 4 > 0$?

2) La vida útil V en años de cierto producto perecedero es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcula la probabilidad de que la vida útil esté entre uno y dos años. Calcula también la probabilidad de que sea mayor que $\log 2$ años.

3) La variable aleatoria que da la distancia al centro en centímetros cuando se lanza un dardo a una diana (supuesta de radio infinito) tiene como función de densidad

$$f(x) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\pi(1 + \alpha x^2)} \qquad \text{para} \qquad x > 0,$$

donde $\alpha > 0$ es una constante que depende de la puntería del lanzador (<u>Nota</u>: Esto es una simplificación con respecto al modelo matemático comúnmente aceptado).

a) Comprueba que f es función de densidad. (*Indicación*: recuerda que $\int_0^\infty dx/(1 + x^2) = \arctan \infty - \arctan 0 = \pi/2$).

b) Para un lanzador de puntería $\alpha = 3/16$, ¿cuál es la probabilidad de que un dardo se quede a más de 4 cm del centro?

c) ¿Cuántas dardos debería emplear el lanzador anterior para tener una probabilidad mayor del 90 % de que al menos uno de ellos quede a distancia menor que $4/3$ cm del centro?

d) Los lanzadores con más puntería, ¿tienen α mayor o menor?

4) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x(2 - x), & \text{si } \ x \in [0, 2] \\ 0, & \text{si } \ x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Calcula el valor de la constante α y, una vez hecho esto, halla la esperanza $E[X]$ y la varianza $V[X]$.

5) Determina razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Para cualquier función de densidad, la media es siempre finita.

b) Las funciones de densidad toman valores entre 0 y 1.

c) Siempre se cumple $V[kX] = k^2 V[X]$.

d) Siempre se cumple $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.

Los números entre corchetes indican problemas del libro de J. de la Horra, a veces con leves cambios.

6) Halla la función de distribución, la esperanza $E[X]$ y varianza $V[X]$, de una variable aleatoria cuya función de densidad vale $1/2$ si $1 < |x| < 2$ y cero en el resto.

7) Un barco debe esperar para entrar en un puerto hasta que la luz de un faro de periodo un minuto ilumine la entrada. Halla la función de densidad y la función de distribución de la variable aleatoria que da la suma de los tiempos de espera en dos entradas independientes. Represéntalas gráficamente.

8) Sean las variables aleatorias independientes X e Y con funciones de densidad f y g respectivamente, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular *a*) $E[X+Y]$, *b*) $E[2XY]$, *c*) $V[2X-Y]$.

9) [§3.13] Una pareja decide encontrarse en un lugar prefijado entre las tres y las cuatro de la tarde, de forma que el primero que llegue sólo esperará al otro durante 15 minutos. Suponiendo que los momentos de llegada de ambos al lugar son independientes y se distribuyen uniformemente entre las tres y las cuatro, calcula la probabilidad de que no se encuentren.

10) [§5.8] Dos sustancias, A y B, se encuentran en la sangre en cantidades X e Y, respectivamente. Estas cantidades varían de un individuo a otro. La densidad conjunta de ambas es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{81}xy^2 & \text{si } 0 < x < 3,\ 0 < y < 3 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Calcula:

a) La esperanza de Y.
b) La probabilidad de que, en un individuo tomado al azar, haya más sustancia A que B.
c) ¿Son independientes X e Y?