CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2011-2012. HOJA DE REPASO

1. Demostrar por inducción que para todo $n \geq 2$, $(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\dots(1+\frac{1}{n^2}) < 3(1-\frac{1}{n})$.

2. La *sucesión de Lucas* está formada por los naturales L_n definidos de este modo:
$$L_1 = 1,\ L_2 = 3;\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ si } n > 2\ .$$
Observar varios de sus restos (mod 5), formular una conjetura para todos ellos, y probarla por inducción. ¿Podría <u>no</u> *formarse una secuencia repetida*, como la que vemos, si cambiamos los valores iniciales?

3. Llamemos $p_d(n)$ al número de puntos $(k_1,\dots,k_d) \in \mathbb{N}^d$ cuyas coordenadas cumplen: $\sum_j k_j = n$.
(a) Probar que: $p_d(0) = 1$, $p_{d+1}(n) = \sum_{m=0}^{n} p_d(m)$. *Sugerencia: k_{d+1} toma algún valor $\in [0,n]$.*
(b) Deducir que $p_{d+1}(n) - p_{d+1}(n-1) = p_d(n)$, y hallar fórmulas para cada $p_d(n)$, $d \leq 4$.
(c) Probar, por inducción sobre d, que $p_d(X)$ es un polinomio $\in \mathbb{Q}[X]$, con grado $d-1$.
Idea: los coeficientes de $p(X) - p(X-1)$ son una función lineal de los de $p(X)$ ¿con qué Ker?

4. Dados conjuntos A, B, C, con $B \subset A \subset C$, hallar qué conjunto X cumple las ecuaciones: $\begin{cases} A \setminus X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$

5. Probar para conjuntos cualesquiera $A_1,\dots,A_n$, o demostrar que es falsa, la siguiente identidad:
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \ \setminus\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k = (A_n \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \setminus A_n)$$
Escribir alguna expresión, usando sólo las operaciones $\cap$, $\setminus$, $\cup$, para el conjunto de aquellos elementos que pertenecen a uno solo de los A_k.

6. Probar para conjuntos cualesquiera S, T, U, V, o mostrar que son falsas, las siguientes igualdades:
$$(S \times U) \cup (T \times V) = (S \cup T) \times (U \cup V) \quad ; \quad (S \times T) \setminus (U \times V) = \big((S \setminus U) \times T\big) \ \cup\ \big(S \times (T \setminus V)\big).$$

7. Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones arbitrarias.
Decir si son ciertas las siguientes afirmaciones, (probarlas o dar contraejemplos):
(a) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva;
(b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces g es inyectiva;
(c) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva;
(d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

8. Sean B un conjunto y $f : \mathbb{N} \to B$ una función tal que se tiene $f(A) = B$ para cada subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ que tenga 5 elementos. ¿Cuántos elementos puede tener el conjunto B?

9. Estudiar si es inyectiva o sobreyectiva alguna de las siguientes funciones $f_m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
$$f_1(i,j,k) = 2^i\,3^j\,5^k, \quad f_2(i,j,k) = 2^i\,3^j\,6^k, \quad f_3(i,j,k) = i^2\,j^3\,k\ .$$

10. Dada una relación $\mathcal{R} \subset A \times A$ sobre un conjunto A , ¿cuántos pares hay en $\mathcal{R}$ si es un *orden total* y A tiene n elementos? Y si se trata de una *relación de equivalencia,* ¿cuántos pares habrá *como mínimo*?

11. Suponer dada en un conjunto A una relación $x\mathcal{R}y$ que tiene las propiedades *reflexiva* y *transitiva*, pero que *ni es simétrica, ni antisimétrica.* Probar las siguientes afirmaciones:
(a) la relación $\mathcal{E}$ definida por: $x\mathcal{E}y \iff x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$, es de equivalencia;
(b) en el conjunto cociente $A/\mathcal{E}$, la relación $\mathcal{S}$ definida por: $\bar{x}\mathcal{S}\bar{y} \iff x\mathcal{R}y$, es de orden;
(c) en el anillo de polinomios $\mathbb{K}[X]$, la relación: $Q(X)$ ***divide a*** $P(X)$ tiene las propiedades postuladas para $\mathcal{R}$, y en cada clase $\bar{P} \in \mathbb{K}[X]/\mathcal{E}$, con $P \neq 0$, de la relación definida en (a), hay exactamente un *polinomio mónico*, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo.

12. Sea (a,b,c) una terna pitagórica, esto es, una solución de la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Demostrar que: **(i)** alguno de los valores a, b ó c, es múltiplo de 3; **(ii)** alguno de ellos es múltiplo de 5; **(iii)** abc es múltiplo de 4. <u>Indicación:</u> Estudiar qué números son cuadrados en $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_5$.

13. Calcular los últimos dos dígitos de 2012^{2012}. <u>Indicación:</u> Calcular primero su resto módulo 25.

14. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Se define la siguiente relación en $\mathcal{F}$:
$$f\mathcal{R}g \iff \text{ para todo } n\in\mathbb{N},\ f(n)|g(n).$$
(a) Demostrar que es una relación de orden. ¿Se trata de un orden total?
(b) ¿Existen elementos minimales? ¿Y elementos maximales?

15. Sea X el conjunto de ternas formadas por las permutaciones de $1,2,3$. Por ejemplo, $(1,2,3),(3,1,2)\in X$. Decimos que $(a,b,c)\ \mathcal{R}\ (d,e,f)$ si las dos expresiones $F(x_a,x_b,x_c)$, $F(x_d,x_e,x_f)$, donde F es la función:
$$F(x,y,z)=(x-y)(z-x)(y-z),$$
dan la misma función de las variables x_1,x_2,x_3 . Demostrar que $\mathcal{R}$ define una relación de equivalencia en X y hallar el número de clases de equivalencia.

16. Hallar el conjunto de soluciones:
(a) de cada uno de los siguientes sistemas, para $x,y\in\mathbb{Z}_{10}$: $\left.\begin{array}{r} x+y=5\\ 2x+9y=1\end{array}\right\}$; $\left.\begin{array}{r} x+3y=1\\ 3x-y=3\end{array}\right\}$
(b) de los siguientes sistemas de congruencias: $\left.\begin{array}{r} x\equiv 3 \pmod{13}\\ x\equiv -1 \pmod{17}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x\equiv -5 \pmod{77}\\ x\equiv 17 \pmod{143}\end{array}\right\}$

17. Demostrar que $n(n^5-1)(n^5+1)$ es divisible por 22 para todo $n\in\mathbb{Z}$.

18. ¿Cuántas unidades hay en $\mathbb{Z}_{2310}$? ¿y en $\mathbb{Z}_{1764}$?

19. Verificar que si $z,w\in\mathbb{C}$ entonces $|z+w|^2+|z-w|^2=2\big(|z|^2+|w|^2\big)$. Explicar el significado geométrico de esa igualdad, dibujando un par de puntos z,w en el plano complejo.

20. Para un entero positivo n, sea $z\in\mathbb{C}$ una solución de la ecuación: $(z+1)^n+(z-1)^n=0$.
(i) Probar que: $z=\dfrac{1+w}{1-w}$ para algún $w\in\mathbb{C}$ tal que $w^n=-1$.
(ii) Deducir que $w\bar{w}=1$ y que z es imaginario puro.

21. Sean $m,n\in\mathbb{Z}_+$ dos números primos entre sí. Llamemos $r=\exp(2\pi i/m)$, $s=\exp(2\pi i/n)$.
Recordemos que $1,r,r^2,\ldots,r^{(m-1)}$ son todas las raíces m-ésimas de 1.
(i) Demostrar que los números $1,r^n,r^{2n},\ldots,r^{(m-1)n}$ también son *todas las raíces m-ésimas de* 1 (escritas en otro orden);
(ii) Demostrar que $\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(r^j+s^k\right)$ es igual a 2 o a 0, dependiendo de los valores de n y m. Decidir en qué casos vale 0 y en qué casos vale 2.
<u>Idea:</u> Probar primero la igualdad $\prod_{k=0}^{n-1}(z+s^k)=z^n-(-1)^n$. Usar esta igualdad y el apartado (i).

22. Descomponer los siguientes polinomios en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $\mathbb{Z}_2[X]$:
$15X^2-19X-8$, $X^2+6X+25$, X^3+6X^2+6X-8, $5X^3+9X^2+13X-3$, $3X^3+2X^2-4X+1$.

23. Calcular el máximo común divisor $\Delta(X)$ de los polinomios
$$P(X)=2X^3-7X^2+10X-6,\ Q(X)=X^4+4.$$
Encontrar dos polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X)P(X)+B(X)Q(X)=\Delta(X)$.

24. Sea $P\in\mathbb{R}[X]$ de grado 5 tal que el máximo común divisor de $P(X)$ y $P(X+1)$ es de grado 4.
(a) Dar un ejemplo de un polinomio $P(X)$ que cumpla esta condición.
<u>Indicación:</u> Observar la relación que hay entre los ceros de $P(X)$ y los de $P(X+1)$.
(b) Probar que si $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ son ambos de este tipo, hay constantes $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $Q(X)=a\,P(X+b)$.

25. Se considera el conjunto $A\subset\mathbb{C}$ formado por todas las sumas finitas $\sum_k a_k\, e^{\pi i r_k}$, con $a_k\in\mathbb{Z},\ r_k\in\mathbb{Q}$.
(a) Demostrar que A es un anillo.
(b) Demostrar que $\sqrt{2},\sqrt{3}\in A$.
(c) Calcular los cardinales de los siguientes conjuntos: A, $A[X]$, $\mathbb{C}\setminus A$.
Decidir si son anillos (respecto de la operaciones usuales de la suma y el producto en $\mathbb{C}$).

¡Feliz Navidad!