

- 1) Hallar un número de tres cifras tal que dé restos 1, 2 y 3, al ser dividido por 7, 9 y 11 respectivamente.
- 2) He comprado bolígrafos a 55 céntimos y rotuladores a 71 céntimos. Si me he gastado en total 20 euros, ¿cuántos he comprado de cada?
- 3) Calcula el resto que queda al dividir 3^{2011} entre 11.
- 4) Si contamos con los dedos de una mano de la forma habitual (comenzando por el índice y acabando en el pulgar), ¿en qué dedo terminará la cuenta hasta 7^{77} ? ¿Y si lo hace Homer Simpson, que sólo tiene cuatro dedos?
- 5) Se considera el conjunto $\mathbb{R}[x]$ de todos los polinomios con coeficientes reales con las operaciones de la suma y la composición (en lugar del producto).
 - a) Averiguar si estas dos operaciones definen la estructura de un anillo en $\mathbb{R}[x]$;
 - b) En caso de la respuesta afirmativa, ver si tiene unidad, si es un anillo conmutativo y si tiene divisores de cero.
- 6) Sea m un número impar no divisible por 5.
 - a) Demostrar que el desarrollo decimal de $1/m$ es periódico y que dicho periodo es de longitud un divisor de $\varphi(m)$.
 Por ejemplo $1/11 = 0.0909\dots$ y $2 \mid \varphi(11)$; $1/13 = 0.076923076923\dots$ y $6 \mid \varphi(13)$.
 (Sugerencia: Al hacer la división larga el primer resto es 1, ¿cuándo vuelve a aparecer?).
 - b) Demostrar que si $1/n$ tiene periodo $n - 1$ entonces n es primo. Encontrar algún número con esta propiedad.
 - c)* Demostrar que si $1/p$ con $p > 2$ primo tiene periodo $p - 1$ entonces las cifras decimales en los lugares k y $k + (p - 1)/2$ siempre suman 9.
- 7) Hallar la parte real y la parte imaginaria de
 - a) $\frac{1-i}{1+i}$, b) $\frac{(3-i)(2+i)}{3+i}$, c) $\frac{(2-i)^2}{(3-i)^2}$, d) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.
- 8) Expresar en forma polar: a) $1+i$, b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, d) $-2 - 2i$.
- 9) Calcular $\exp(2011\pi i)$, $\exp(\pi i/2)$, $\exp(\pi 3^{2011}i/2)$ y $\exp(-\pi i/4)$.
- 10) Hallar para qué números complejos z y w de módulo 1 se cumple $z + w = 2$. ¿Cuándo se cumple $z + w = 1$ con z y w de módulo 1?
- 11) Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números: $1+i$, $2-i$, $8-6i$, $-8-15i$, $15-8i$.
- 12) Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:
 - a) $z^2 + 3iz - 3 + i$, c) $z^2 + (2+3i)z - 7/2 - 7i$,
 - b) $2z^2 + 4z + 2 + i$, d) $z^2 + (5+i)z + 17i/4$.
- 13) En principio parece difícil hallar una fórmula para calcular la derivada n -ésima de la función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$. Comprobar que es cierta la identidad

$$\frac{2i}{x^2 + 1} = \frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}$$

y utilizarla para calcular $f^{(4)}(0)$. Establecer una fórmula general para $f^{(n)}(0)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

14) a) Demostrar la identidad

$$\sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}(x/2)}$$

para x que no sea múltiplo entero de 2π .

Sugerencia: Es la suma parcial de una progresión geométrica.

b) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $N \in \mathbb{N}$, $|\operatorname{sen}(2N + 1)x| \leq (2N + 1) |\operatorname{sen} x|$.

15) Utilizando las ideas aprendidas en el ejercicio anterior, demostrar que para todo $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$

$$\left(\tan \frac{\pi}{2N}\right) \sum_{n=1}^N \operatorname{sen} \frac{\pi n}{N} = 1.$$

16) En cálculo, utilizando polinomios de Taylor, se prueba la fórmula $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ con convergencia absoluta para todo $x \in \mathbb{C}$.

Sin embargo no hay en general funciones sencillas que sumen una serie de potencias dada.

a) Buscar una fórmula sencilla para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Indicación: En el desarrollo para e^x , sustituir x por $i^k x$ con $k = 0, 1, 2, 3$.

b) Utilizar un truco similar para encontrar una fórmula para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

17) Calcular los diferentes valores de $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[4]{16i}$ y de $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

18) Dado $n > 1$, demostrar que la suma de todas las raíces n -ésimas de 1 es cero.

Sugerencia: Comprobar que esa suma no cambia al multiplicar por cualquiera de ellas.

19) Sea $z = 2e^{2\pi i/5} + 1 + 2e^{-2\pi i/5}$. Utilizando que $\sum_{k=1}^5 e^{2\pi ki/5} = 0$ (por el problema anterior), probar que $z^2 = 5$. Deducir de ello una expresión para $\cos(2\pi/5)$, que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.

20) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados, entonces su producto también lo es. (Sugerencia: $|x + iy|^2 = x^2 + y^2$). Notando que $13 = 2^2 + 3^2$ y $29 = 2^2 + 5^2$, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $377 = a^2 + b^2$.

21) Denotemos con $\operatorname{Im}(z)$ la parte imaginaria de z y sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1$. Probar las fórmulas

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{c^2 + d^2} \quad \text{y} \quad \frac{|z - i|^2}{\operatorname{Im}(z)} + 2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

para $z = (ai + b)/(ci + d)$.

22) a) Demostrar que la función $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$ establece una biyección de los números complejos con parte real positiva a los que satisfacen $|z| < 1$.

b) ¿Cuál es la imagen por f de los z que tienen $|z| < 1$?

c) Dar una fórmula para la composición $g(z) = (f \circ f)(z)$ y usarla para explicar la relación entre las respuestas a los apartados a) y b).

23) Probar que, si $z \neq w$ son complejos con $|z|, |w| \leq 1$, se tiene: $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| \leq 1$.