CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2012-2013. **HOJA 3.**

1) Sea $X = \cup_{i\in I} A_i$ una **partición** de X; es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Demostrar que la relación *“ $x\mathcal{R}y \iff x$ e y pertenecen al mismo A_i ”* , es una relación de equivalencia X.
Recíprocamente, probar que dada una relación de equivalencia sobre un conjunto X, las clases de equivalencia definen una partición de X.
En definitiva, podemos pensar siempre una relación de equivalencia como una partición.

2) Si $f : X \to V$ es una **función**, probar que *“ $x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$ ”* define una relación de equivalencia en X, y que cada una de sus clases de equivalencia es la imagen inversa de un $z \in V$. Establecer una biyección entre el conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ y $Im(f)$.

3) Fijado un entero positivo n, definimos $n\mathbb{Z} = \{nk : \ k \in \mathbb{Z}\}$ y consideramos la relación sobre $\mathbb{Z}$ dada por: $m\mathcal{R}k \iff m - k \in n\mathbb{Z}$. Demostrar que es una relación de equivalencia.
Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente. Al conjunto cociente de esta relación lo denotamos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (se lee $\mathbb{Z}$ módulo n).

4) Es habitual y más cómodo utilizar la notación $\mathbb{Z}_n$ para referirse a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.

i) $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(\bar{m}) = m$ (donde $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$ denota la clase del entero m).
ii) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad g(m) = \bar{m}$.
iii) $G : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad G((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{m + k}$.
iv) $H : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad H((\bar{n}, \bar{m})) = \overline{mk}$.

5) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por: $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff xy = x'y'$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

6) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación $(n, m)\mathcal{R}(n', m') \iff \max\{n, m\} = \max\{n', m'\}$.
a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describe la clase de equivalencia del elemento $(2, 2)$.
c) Describe el conjunto cociente.
d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

7) Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En F se define la siguiente relación:

$$f\mathcal{R}g \iff \textit{existe } r \in \mathbb{R},\ r > 0 \ \textit{tal que } f(x) = g(x) \ \textit{para } |x| < r.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre F.

8) Sea $\mathcal{S}$ una relación binaria en un conjunto X, que es reflexiva y transitiva, pero no es antisimétrica.
a) Dar un ejemplo de una relación de este tipo.
b) Demostrar que la relación $\sim$, definida por $a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad (a\,\mathcal{S}\,b) \wedge (b\,\mathcal{S}\,a)$, es una relación de equivalencia sobre X.
c) Denotamos por $[a]$ la clase de equivalencia de un elemento $a \in X$. Demostrar que la relación $\widehat{S}$,

$$[a]\,\widehat{\mathcal{S}}\,[b] \quad \Leftrightarrow \quad a\,\mathcal{S}\,b, \qquad a, b \in X,$$

está bien definida en el conjunto cociente $X/\sim$.
d) Demostrar que $\widehat{S}$ es una relación de orden.

9) Considerar las relaciones en $\mathbb{Z}$ definidas por $m\mathcal{R}_1 n \iff 5|(m+2n)$; $m\mathcal{R}_2 n \iff 4|(9m+3n)$ ($k|\ell$ significa "k divide a ℓ").
a) Decidir si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son relaciones de equivalencia.
b) En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

10) Sea B un subconjunto finito de un conjunto A.
En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación: $X\mathcal{R}Y \iff \mathrm{Card}(X \cap B) = \mathrm{Card}(Y \cap B)$.
a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente?

11) En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ se define la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y$ si y sólo si $\min X = \min Y$.
a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
c) ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

12) Sean A y B dos conjuntos equipotentes. Sean A' y B' dos conjuntos también equipotentes. Demostrar lo siguiente:
a) $A \times A'$ es equipotente a $B \times B'$.
b) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B$ es equipotente a $A \times \{0, 1\}$
c) Si $A \cap A' = B \cap B' = \emptyset$ entonces $A \cup A'$ y $B \cup B'$ son equipotentes.

13) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.

14) Sea A un conjunto infinito.
a) Demostrar que si a es un elemento de A, el conjunto $A \setminus \{a\}$ es equipotente a A. (Sugerencia: quitarles a A y a $A \setminus \{a\}$ un subconjunto infinito y numerable.)
b) Demostrar que si $F \subset A$ es un subconjunto finito, entonces $A \setminus F$ es equipotente a A.

15) Calcular el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$; d) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$; e) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
g) El conjunto de todas las raíces reales de todos los polinomios con coeficientes reales;
h) El conjunto de todas las raíces reales (racionales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama "conjunto de los números algebraicos");
i) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen dos elementos;
j) El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.

16) Demuestra que hay infinitos enteros primos de la forma $4n - 1$ y de la forma $6n - 1$.

17) Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

18) Sabemos que dados dos enteros positivos a y b, existen primos $p_1, \ldots, p_s$ de modo que $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$ para algunos $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$.
i) Expresa el $\mathrm{mcd}(a, b)$ y el $\mathrm{mcm}(a, b)$ en función de estas factorizaciones.
ii) Demuestra que $ab = \mathrm{mcd}(a, b) \cdot \mathrm{mcm}(a, b)$.
iii) Halla el máximo común divisor de 1547 y 3059 usando dos procedimientos: el descrito en i) y el algoritmo de Euclides.

19) Sea $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ la descomposición de n en factores primos. Utilizando la unicidad de la decomposición en primos, demuestra que n tiene $(n_1+1)(n_2+1) \cdots (n_s+1)$ divisores positivos.

20) Encuentra todas las parejas $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathrm{mcd}(a, b) = 10$ y $\mathrm{mcm}(a, b) = 100$.