CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2012-2013. **HOJA 2.**

1) Sean A y B dos conjuntos finitos de m y n elementos respectivamente.
a) Hallar el número de funciones $f : A \longrightarrow B$.
b) Hallar el número de funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$.

2) Sea X un conjunto finito con n elementos.
¿Cuántos subconjuntos tiene $X \times X$? ¿Cuántas funciones hay de X en $X \times X$?

3) Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$, el número combinatorio $\binom{n}{k}$ se define como el número de subconjuntos de k elementos en un conjunto X que tenga n elementos.
A partir de la definición, demuestra las siguientes propiedades de los números combinatorios:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$; d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

es decir, el conjunto X tiene en total 2^n subconjuntos.

4) Utilizar la definición de los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Derivar k veces esa igualdad, y evaluarla en $x = 0$ para demostrar que se tiene la siguiente expresión algebraica para los números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

5) Utilizar el *principio de inclusión–exclusión* para responder:
(a) ¿Cuántos números naturales coprimos con 1000 hay entre 1 y 1000?
(b) ¿Cuántos números naturales coprimos con 360 hay entre 1 y 360?

6) En una reunión de 4 personas, cada uno ha venido con su paraguas y los han dejado en un paragüero. Al final de la reunión, cada persona escoge un paraguas de forma aleatoria.
a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los paraguas de forma que ninguno se quede con el suyo?
b) Responder a la misma pregunta para el caso de n personas y n paraguas.

7) En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto que se especifica debajo. Decidir cuáles son **relaciones de orden**; en caso de serlo, estudiar si es o no un **orden total**; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

$\boxed{\begin{array}{c} x \geq y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} x < y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} |x| \leq |y| \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} A \subset B \\ A, B \in \mathcal{P}(X) \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} a \leq c \ \wedge \ b \leq d \\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2} \\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \end{array}}$

Ojo: por convenio, '$\subset$' incluye el caso '$=$'; si se escribe '$\subseteq$', es para ayudar a recordarlo.

8) Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define en X la siguiente relación:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Demostrar que la relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es inyectiva.

9) Para la relación de orden dada en $\mathbb{Z}^+$ por $\boxed{n|m}$, dar respuesta a las siguientes preguntas:
(a) ¿Tiene $\mathbb{Z}^+$ un máximo y/o un mínimo para esta relación?
(b) ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$ tienen un máximo y cuáles un mínimo?
(c) Dado un intervalo $A = \{k \in \mathbb{Z}^+ : n \leq k \leq m\}$, ¿qué debe cumplir un $k \in A$ para ser un elemento maximal de A? ¿Y para ser minimal?
(d) ¿Cuáles son los minimales de $\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$?
(e) ¿Qué proceso podríamos seguir para aislar los minimales de un intervalo dado?

10) Decimos que una relación de orden $\mathcal{R}$ en un conjunto X es un **buen orden**, si cada subconjunto no vacío $A \subset X$ tiene un mínimo, como sucede por ejemplo con el orden '$\leq$' en $\mathbb{N}$.
Probar que también están **bien ordenados** por '$\leq$' los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
(a) La unión $X \cup Y$ de dos subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, si cada uno de ellos está bien ordenado.
(b*) El conjunto $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$, si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, son dos sucesiones crecientes.

11) Hallar cuántas relaciones de orden se pueden definir en un conjunto X con sólo dos elementos, que no sean *isomorfas*, es decir, que no se transformen una en otra mediante una biyección de X en X. Repetir la tarea con un X de 3 y de 4 elementos. Usar *diagramas* para mostrar las respuestas.

12) Probar la afirmación siguiente (o dar un contraejemplo que la refute):
Si un conjunto ordenado A tiene un solo elemento minimal a, entonces a es el mínimo de A.

13) ¿Es posible encontrar, entre algún par de los siguientes conjuntos ordenados, una biyección que transforme una en otra las relaciones de orden dadas sobre ellos? ¿Entre cuáles?
(a) $\mathbb{Z}$, con el orden $\leq$ habitual.
(b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, con el orden dado por: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si y sólo si $|a - c| \leq d - b$.
(c) $\mathbb{R}$, con el orden $\leq$ habitual.
(d) El conjunto de los racionales de la forma $1 \pm n/(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$, con el orden $\leq$ habitual.
(e) El conjunto de los discos abiertos del plano, con su centro en el eje X, ordenados por inclusión.

14) Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden establecido, y llamando "palabras" a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.

Usando el signo '$\leq$' para el orden de las "letras", dar una definición de cuándo la palabra '$a_1 a_2 \dots a_n$' precede a la '$b_1 b_2 \dots b_m$' : decir qué deben cumplir sus letras para ello.

Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo. Pero *¿será eso cierto para cualquier conjunto infinito de palabras?*
(*) Probar que es cierto (y por lo tanto se trata de un *buen orden*), o dar un contraejemplo.

15) En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos la siguiente relación: $x\mathcal{R}y$ si x e y tienen el mismo signo y $|x| \leq |y|$.
a) Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.
b) Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo $[-3, 2)$.

16) Considera la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow f(n, m) = 2^n 3^m \end{aligned}$$

y las siguientes relaciones en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n, m)\mathcal{R}_1(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \leq f(n', m')$$
$$(n, m)\mathcal{R}_2(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \mid f(n', m')$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?

b) Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq n + m \leq 4\}$ para cada una de la relaciones de orden $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.

17) Sean m y n números naturales. Demuestra que si m y n son potencias de 3, entonces $m + n$ no es nunca una potencia de 3.

18) Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

19) Estudiar si la siguiente función es inyectiva y/o sobreyectiva.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ A &\longrightarrow f(A) = \{(n - 1)/2 : (n \in A) \wedge (n \text{ es impar})\}. \end{aligned}$$

¿Quién es $f^{-1}(\{\varnothing\})$?

20) Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow P = \{primos\}$ dos funciones definidas por
$f(n) =$ el mayor primo que divide a n ,   y $g(n) =$ el menor primo que divide a n.
a) Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.   b) ¿Quién es $f^{-1}(\{3\})$? ¿Quién es $g^{-1}(\{3\})$?