CONJUNTOS Y NÚMEROS. **Curso 2012-2013.**

HOJA 1: Clases de números. Lógica, pruebas por inducción. Conjuntos y funciones.

1) Decir cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles *son necesarias y suficientes* para que un número **natural** n sea divisible por 6.

(a) n es divisible por 3; (c) $n = 24$; (e) n es par y divisible por 3;
(b) n es divisible por 12; (d) n^2 es divisible por 6; (f) n es par o divisible por 3.

¿Es posible colocar las seis en este esquema, de modo que todas las implicaciones sean ciertas?

$$(\ \ ) \Rightarrow (\ \ ) \Rightarrow (\ \ ) \Leftrightarrow (\ \ ) \Rightarrow (\ \ ) \Rightarrow (\ \ )$$

¿Puede hacerse eso de más de una manera? ¿Se cumple alguna otra implicación?

2) En las siguientes proposiciones, x, y son números **reales**. Traduce cada una a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explica cuáles son ciertas y escribe la negación de las que no lo sean.

(a) $\forall x\ (\ x > 0 \ \Rightarrow\ \exists y\ : (y > 0) \wedge (y^2 = x)\ )$ (c) $\exists x\ : (1 < x^2) \wedge (x^2 < x)$
(b) $\exists x\ : \forall y\ (\ (y < x) \vee (y > 5)\ )$ (d) $\forall y\, \exists x\ : (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1)$

3) Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a sentencias que usen símbolos y cuantificadores, y no contengan palabras.

(a) *No siempre hay un número entero entre la raíz cuadrada de* n *y la de* $n + 4$.
(b) *Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.*

4) Razona con palabras por qué no son equivalentes las afirmaciones de cada uno de los siguientes pares (en las que $x, y \in \mathbb{R}$), y explica cuáles de ellas son ciertas.

(a) $\forall x\, \exists y\ : (x = 2y\ \vee\ x = 2y + 1)$ *no equivale a* $\exists x\ : \forall y\, (x = 2y\ \vee\ x = 2y + 1)$.
(b) $\exists x\ : \forall y\ (x < y\ \wedge\ y < x + 2)$ *no equivale a* $\forall x\, \exists y\ : (x < y\ \wedge\ y < x + 2)$.

5) Explica por qué son equivalentes las dos proposiciones: $S \wedge R$, $\neg(S \Rightarrow \neg R)$, ilustrando la explicación con un *diagrama de Venn*. Confírmalo con la *tabla de verdad* de cada una de ellas.
Haz lo mismo con las proposiciones: $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$, $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$.

6) Halla expresiones para las siguientes sumas, y prúebalas por **inducción**:

(i) la suma de los n primeros números naturales: $0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)$;
(ii) la suma de los n primeros términos de la **progresión aritmética**: $a + kd$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$;
(iii) la suma de las n primeras potencias de r: $r^0 + r^1 + \cdots + r^{n-1}$;
(iv) la suma de los n primeros términos de la **progresión geométrica**: cr^k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$;
(v) la suma de los ángulos de un polígono de n lados.
Indicación: recuerda que los ángulos de un triángulo suman π **radianes.**

7) Demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ las afirmaciones siguientes:

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (b) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, si $n \geq 1$.
(c) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$; (d) $2^n > 1 + 2n$, si $n > 2$;
(e) $2^n > n^2 + 1$, si $n > 4$; (f) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, si $n \geq 2$.

8) Prueba, para todo $n \in \mathbb{N}$, que los números:
$a_n = 4^n - 1$, $b_n = 7^n - 4^n$ son divisibles por 3; $c_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.

9) Demuestra, para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad: $(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = (q^{2^{n+1}} - 1)/(q-1)$.

10) Probar que $\boxed{\textit{todo número natural mayor que 1, es igual a algún producto de números primos.}}$
Deducir que $\boxed{\textit{hay infinitos primos.}}$ Es decir, que hay más de n primos distintos, para todo $n \in \mathbb{N}$.

11) Se llama *cuadrado* a un número de la forma a^2, donde a es un número natural.
Demuestra que si un natural $n > 0$ es un *cuadrado*, $n + 1$ no puede ser también un *cuadrado*.
¿Puede haber racionales r, s, que cumplan: $r^2 = s^2 + 1 > 1$? ¿Puede ser entero uno de ellos?

12) Usando la definición del *logaritmo en base b* : $\boxed{\log_b(x) = a \;\Leftrightarrow\; x = b^a}$ y la de '$\log(x) = \ln(x)$' , que es el *logaritmo en base e* (llamado *natural* o *neperiano*), prueba que para cada $x > 0$ se tiene:

$$\log(x) = \log(10)\log_{10}(x) = \log(2)\log_2(x) \;; \quad \log_{10}(x) = \log_{10}(2)\log_2(x) \;.$$

Verifícalas para valores concretos de x con tu calculadora, y asegúrate de conciliar su notación y la nuestra.

13) Demuestra por **reducción al absurdo** que $\log_3 222$ no puede ser un número racional.

14) Probar, para conjuntos arbitrarios S, T, U y V, que son ciertas las siguientes igualdades.
(Atención: los diagramas de Venn son útiles para orientarse, pero la prueba no debe depender de ellos).

(a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$
(b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$
(c) $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$
(d) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$
(e) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$

15) Dados conjuntos A, B, C, con $B \subset A$, explicar en cada caso qué conjuntos X satisfacen las ecuaciones:

$$\textbf{(i)} \begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases} \text{, si sabemos que } C \supset A. \qquad \textbf{(ii)} \begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases} \text{, si sabemos que } A \cap C = \varnothing \;.$$

16) Razona si, para subconjuntos A, B del **dominio** de una **función** f se tendrá o no en general:

(a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, (b) $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$,
(c) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$, (d) $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.

Para cada inclusión, prueba que se cumple o da un contraejemplo.

17) Dadas funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, probar las siguientes afirmaciones:

(a) f inyectiva $\wedge$ g inyectiva $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva.
(b) f sobre $\wedge$ g sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre.
(c) Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.
(d) Si g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es f, y es sobre si y sólo si lo es f.
(e) Si además es $X = Z$, lo mismo es cierto para $f \circ g$.

18) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \ge 0 \;. \end{cases}$$

(a) Dibuja los gráficos de las funciones f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.
(b) Halla las imágenes de cada una de esas funciones y explica si son inyectivas y/o suprayectivas.

19) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |2x + 1/2| - 1/2$, halla su imagen $f(\mathbb{R})$, y también la $f(\mathbb{Z})$.
¿Es f sobre o inyectiva? Prueba que sin embargo sí da una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $f(\mathbb{Z})$.

20) ¿Cuáles de las siguientes funciones son **inyectivas**? ¿Cuáles **suprayectivas**? ¿Es alguna **biyectiva**? (Empieza por verificar que esas fórmulas definen funciones entre los conjuntos que se indican).

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m) = m + 2$;
(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(m) = 2m - 7$;
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$;
(d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + 4x$;
(e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n(n + 1)$;
(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;
(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 + n + 1$;
(h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(t) = t/(t + 1)$.

21) Sea $f : X \to Y$ una función. La **imagen inversa** de un subconjunto $A \subset Y$ se define como:

$$f^{-1}(A) \;=\; \{x \in X \;|\; f(x) \in A\}.$$

Dados subconjuntos $A, B \subset Y$, demuestra que

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
(c) $f(f^{-1}(A)) = f(X) \cap A$;
(d) $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$.

22) Probar, o demostrar que son falsas, las siguientes afirmaciones (cada $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X):

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$; b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.