1) Demostrar por inducción que para todo $n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Es cierto para $n = 1$: $1/\sqrt{1} < 2\sqrt{1} = 2$.

Y si es cierto para n , también lo es para $n+1$, porque $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$,

y por lo tanto sumamos al lado izquierdo menos que al lado derecho: $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

---

2) Sea la relación en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definida mediante

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \;\Leftrightarrow\; a \leq c \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 \leq c^2 + d^2.$$

Explicar si es una relación de orden.

Es obviamente <u>reflexiva</u>: se cumplen las igualdades si $(a,b) = (c,d)$.
Y también <u>transitiva</u>:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \wedge (c,d)\mathcal{R}(e,f) \;\Rightarrow\; a \leq c \leq e \;\wedge\; a^2+b^2 \leq c^2+d^2 \leq e^2+f^2 \text{ , luego } (a,b)\mathcal{R}(e,f) \text{ .}$$

Además, $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \wedge (c,d)\mathcal{R}(a,b) \;\Leftrightarrow\; a = c \;\wedge\; a^2+b^2 = c^2+d^2 \;\Rightarrow\; b^2 = d^2 \;\Rightarrow\; b = d$, por ser ambos ≥ 0 . Luego es <u>antisimétrica</u>.

---

3) Decidir razonadamente si existe una función biyectiva $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,1)$, dando un ejemplo en caso afirmativo o una demostración de imposibilidad en caso negativo.

Por ejemplo $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ da una biyección entre esos intervalos, ya que es creciente, con $f(0) = 0$ y $f(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$; la inversa es $y \in [0,1) \to x = y/(1-y) \in [0,\infty)$.

La respuesta al 1) usa una idea MUY útil: la de que
(a+b)(a-b) = ...

Pero puede llegarse a la misma conclusión de otras maneras.