ENUNCIADOS, CON POSIBLES RESPUESTAS, de los ejercicios de hoy **19/12**.

1. Demostrar que $z = e^{2\pi i/125}$ es un cero del polinomio $x^{100} + x^{75} + x^{50} + x^{25} + 1$.

   Respuesta:
   Decir que un cierto z es un cero del polinomio $x^{100} + x^{75} + x^{50} + x^{25} + 1$ es lo mismo que decir que

   $$z^{25} \text{ es un cero de } p(x) = x^4 \ + x^3 \ + x^2 \ + x \ + 1 \ :$$

   lo que resulta al evaluar en z el primero, es lo mismo que resulta al evaluar en $w = z^{25}$ el segundo.

   El polinomio $p(x)$ cumple $p(x)(x-1) = x^5 - 1$, luego sus ceros son todos los $w \neq 1$ que cumplen $w^5 = 1$; y para el $z = e^{2\pi \mathbf{i}/125}$ dado, se tiene: $w = z^{25} = e^{2\pi \mathbf{i}/5} \ \Rightarrow \ w^5 = 1 \neq w$, luego $p(w) = 0$.

2. Hallar todos los polinomios $P(x)$ en $\mathbb{Z}_3[x]$ mónicos (con coeficiente principal 1) de grado 3 tales que $x = 1$ es un cero simple de P y $P(0) \neq 0$.

   Respuesta:
   $x = 1$ es un cero simple de un polinomio $P(x)$ si y sólo si $P(x) = (x-1)Q(x)$ con $Q(1) \neq 0$.
   Para que P sea de grado 3, mónico y con $P(0) \neq 0$, deberá ser $Q(x) = x^2 + ax + b$, con $b = Q(0) \neq 0$.

   Si los coeficientes están en $\mathbb{Z}_3$, eso nos deja pocas posibilidades: $Q(x) = x^2 + ax \pm 1$, y los que cumplen además la condición $Q(1) \neq 0$ son sólo estos cuatro: $Q(x) = x^2 + 1$, $x^2 + x - 1$, $x^2 - x \pm 1$.

3. Sean los conjuntos de números complejos

   $$A = \{x + iy \ : \ x > 0, \ y > 0\} \quad \text{y} \quad B = \{x + iy \ : \ x < 0, \ y \in \mathbb{R}\}.$$

   Demostrar que $f(z) = iz^2$ cumple $f(A) = B$ y estudiar si $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

   Respuesta:
   $z \in A \ \Leftrightarrow \ \arg(z) \in (0, \pi/2)$, y la imagen de A por la función $w = z^2$ es por lo tanto el semiplano $\arg(w) \in (0, \pi)$; al multiplicar por $\mathbf{i}$, eso se convierte en $\arg(\mathbf{i}w) \in (\pi/2, 3\pi/2)$, lo que equivale a la afirmación $\Re(\mathbf{i}w) < 0$, que es la definición del B que nos dan. Esto prueba que $f(A) = B$.

   Además, la función es inyectiva en A , porque $\mathbf{i}z_1^2 = \mathbf{i}z_2^2$ si y sólo si $z_1 = \pm z_2$, y no hay dos números opuestos en A, que es sólo el "primer cuadrante" del plano $\mathbb{C}$.