Conjuntos y Números — **1^o de Matemáticas y de DT**

CURSO 2012-2013 — MIÉRCOLES 16 DE ENERO DE 2013

GRUPOS 711, 715, 716, DT — EXAMEN FINAL

TIEMPO DISPONIBLE: 3 HORAS

APELLIDOS Y NOMBRE ____________________

GRUPO ______ D.N.I. ____________________ FIRMA ____________

1)

(a) Probar por inducción que: $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\geq\dfrac{7}{12}$, para cada $n\geq 2$.

(b) ¿Habrá algún $c>0$ tal que se tenga para cada $n\geq 1$: $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\geq c$? Hallar un tal c , o probar que no lo hay.

---

2)

(a) Explicar a cuál de las que la siguen (A1 ó A2) *equivale* la afirmación:

"si un número $n\in\mathbb{N}$ es la suma de dos cuadrados de números enteros, entonces n no es congruente con -1 módulo 4",

A1) *"si un número $n\in\mathbb{N}$ no coincide con ninguna suma de dos cuadrados de números enteros, entonces n es congruente con -1 módulo 4",*

A2) *"un número $n\in\mathbb{N}$ que es congruente con -1 módulo 4 no coincide con ninguna suma de dos cuadrados de números enteros".*

(b) Averiguar y probar cuáles de las afirmaciones anteriores son ciertas o falsas.

---

3) Decidir si son numerables los siguientes tres conjuntos, y explicar por qué:

(a) el conjunto de sucesiones infinitas $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ de ceros y unos, que contienen sólo un número finito de unos;

(b) el conjunto de sucesiones infinitas $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ de ceros y doses.

(c) el conjunto de sucesiones infinitas $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ de ceros y unos, que no contiene tres ceros ni tres unos seguidos.

---

4)

(a) Demostrar que $104^{401}+401^{104}$ es un múltiplo de 9.

(b) ¿Es múltiplo de 10?

---

5)

(a) ¿Cuántas soluciones complejas tiene la ecuación $2+z^4=\dfrac{3}{z^4}$?

(b) Calcular todas estas soluciones e indicar, dónde se encuentran en el plano complejo.