ENUNCIADOS DEL 16/ 11/ 2011 con posibles respuestas. Conjuntos y Números. Grupo 711.

1. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ es impar}\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n - 3 \text{ es múltiplo de } 2011\}$.
   Probar que son equipotentes estableciendo una biyección $f : A \longrightarrow B$ entre ellos.

   RESP:
   Como $A = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{2011\,k + 3 : k \in \mathbb{N}\}$, una posible biyección es:
   $$n \to 2011\,\frac{n-1}{2} + 3 \ .$$

---

2. En $\mathbb{Z}$ establecemos la relación $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow 4 \mid n^2 - m^2$. Estudiar si es de equivalencia y en caso afirmativo hallar cuántas clases de equivalencia hay.

   RESP:
   Las tres propiedades de una relación de equivalencia salen de que, $\forall n, m, p$:
   $$\text{(i):}\ \ 4 \mid n^2 - n^2 = 0 \ ; \qquad \text{(ii):}\ \ 4 \mid n^2 - m^2 \ \Rightarrow\ 4 \mid m^2 - n^2 \ ;$$
   $$\text{(iii):}\ \ 4 \mid n^2 - m^2 \ \wedge\ 4 \mid m^2 - p^2 \ \Rightarrow\ 4 \mid n^2 - p^2 = (n^2 - m^2) + (m^2 - p^2) \ .$$
   Además, $4 \mid n^2 - m^2 = (n + m)(n - m) \ \Leftrightarrow\ n, m$ son ambos pares o ambos impares, porque de lo contrario esos dos factores serían impares y su producto también; esto también muestra, directamente, que se trata de una relación de equivalencia: las clases son las de *restos* mod(2), es decir, los pares y los impares.

---

3. Explicar razonadamente si cada una de estas ecuaciones tiene alguna solución en $\mathbb{Z}$ (no es necesario hallarla):

   $$a)\ 7x \equiv 2 \pmod{71} \qquad\qquad b)\ \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{1000} \\ x \equiv 2 \pmod{1001} \end{cases}$$

   RESP:

   a) Sí, porque 7 y 71 son (obviamente) primos entre sí, por lo que la ecuación $7x + 71y = n$ tiene soluciones $x, y \in \mathbb{Z}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ dado.

   b) Sí, porque también 1000 y 1001 son (obviamente) primos entre sí; el *Teorema Chino de los Restos* asegura que habrá solución $x \in \mathbb{Z}$ para cualesquiera restos r_0, r_1 que pidamos.

Es fácil ver que $x = 2$ es una solución en este caso. Felicitaciones a quien se diese cuenta, pero lo que esperábamos era este argumento general.