Conjuntos y números — **1º del Grado en Matemáticas y del Doble Grado en Informática y Matemáticas**

20 DE JUNIO 2012 — EXAMEN FINAL CON POSIBLES (BREVES) RESPUESTAS

---

1. Dado un número real $r \neq 0$, se considera la sucesión $a_n = r^n + \dfrac{1}{r^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Demostrar que $a_{n+1} = a_1 a_n - a_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

RESPUESTA: $a_n a_1 = \left(r^n + \dfrac{1}{r^n}\right)\left(r + \dfrac{1}{r}\right) = r^{n+1} + r^{n-1} + r^{1-n} + r^{-n-1} = a_{n+1} + a_{n-1}$.

b) Demostrar que si $r + \dfrac{1}{r}$ es un entero, entonces cada $a_n = r^n + \dfrac{1}{r^n}$ es un entero.

RESPUESTA: Si $a_1 = r + 1/r \in \mathbb{Z}$ *, entonces* $a_k \in \mathbb{Z}$ *para todo* $k \leq 1$ *, ya que* $a_0 = 1 + 1 = 2$.
Pero si $\boxed{a_k \in \mathbb{Z} \text{ para todo } k \leq n}$ *, esto mismo es cierto para* $n+1$ *, porque en ese caso* $a_{n+1} = a_1 a_n - a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ *. Y así queda probado, por inducción, que es cierto* $\forall n$.

---

2. En el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definimos la relación: *$A\mathcal{R}B$ si el conjunto $A \triangle B$ es finito,* donde $A \triangle B$ denota la *diferencia simétrica* de conjuntos: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

a) Demostrar que para cualesquiera conjuntos $A, B, C \subset \mathbb{N}$ se tienen las inclusiones

$$A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B) \qquad \text{y} \qquad A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C) .$$

RESPUESTA:
$$x \in A \setminus B \iff (x \in A) \wedge (x \notin B) \implies \begin{cases} x \in A \setminus C \text{ , para los } x \notin C \text{ ,} \\ x \in C \setminus B \text{ , para los } x \in C \text{ .} \end{cases}$$
Es decir, $\quad x \in A \setminus B \implies x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.
Y aplicando esto a las dos diferencias $A \setminus C$, $C \setminus A$:
$A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) \subset \big((A \setminus B) \cup (B \setminus C)\big) \cup \big((C \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) = (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

b) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

RESPUESTA: Reflexiva: Porque $A \triangle A = \emptyset$ *(que se incluye en la definición de conjunto finito).*
Simétrica: Porque $A \triangle B = B \triangle A$.
Transitiva: Si $A \triangle B$ *y* $B \triangle C$ *son finitos, también lo es* $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

---

3. Sean A y B dos conjuntos disjuntos y supongamos dadas dos relaciones de orden:

$\mathcal{R}$ en el conjunto A , $\quad \mathcal{S}$ en el conjunto B.

a) Probar que la siguiente es una relación de orden en el conjunto $A \cup B$:

$$x \preceq y \iff (x, y \in A \ \wedge x\mathcal{R}y) \vee (x, y \in B \ \wedge x\mathcal{S}y)$$

RESPUESTA: Reflexiva:
Si $x \in A \cup B$ *, entonces o bien* $x \in A$ *, y se tiene:* $x\mathcal{R}x \Longrightarrow x \preceq x$ *, o análogo si* $x \in B$.
Anti-simétrica:
Si $x, y \in A$ *, entonces* $(x \preceq y) \wedge (y \preceq x) \iff (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)$ *, por ser* A, B *disjuntos; y eso* $\Longrightarrow x = y$ *; análogo si* $x, y \in B$.
Transitiva:
Por ser A, B *disjuntos,* $(x \preceq y) \wedge (y \preceq z)$ *implica que los tres pertenecen a uno de los dos conjuntos, por ejemplo al* A *; y entonces* $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z \Longrightarrow x \preceq z$.

b) Explicar si la siguiente es, o no, una relación de orden en el conjunto $A \cup B$:

$$x \preceq y \iff (x = y) \vee (x \in A \ \wedge \ y \in B)$$

RESPUESTA: Es una relación de orden:
Reflexiva: Porque $x = x$ *para todo* $x \in A \cup B$.
Anti-simétrica: Si $x \neq y$ *, entonces* $(x \preceq y) \wedge (y \preceq x) \implies x, y \in A \cap B$ *, que es vacía.*
Transitiva: Por ser A, B *disjuntos,* $(x \preceq y) \wedge (y \preceq z) \implies (x = y) \vee (y = z)$ *, luego* $x \preceq z$.

---

4. Se dan los números complejos: $z = 1 + i$, $w = \sqrt{3} + i$.

a) Escribir ambos en *forma polar*: $re^{i\theta}$, con los r, θ adecuados en cada caso.

RESPUESTA: $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $\sqrt{3} + i = 2\, e^{i\pi/6}$, *porque:* $1 = \tan(\pi/4)$, $1/\sqrt{3} = \tan(\pi/6)$.

b) Expresar el cociente z/w en la forma $x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$, y <u>usar</u> el apartado a) para deducir que:

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \ , \ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \ .$$

RESPUESTA: *Usando a), es:* $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}\, e^{i\pi/12} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \big(\cos(\frac{\pi}{12}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{12}) \big)$, *ya que* $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$.

Pero también se tiene: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{|w|^2} = \dfrac{(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)}{4}$, *y resulta lo pedido.*

---

5. Se pide:

a) Hallar dos enteros **positivos** x, y, tales que $14x + 15y = 222$.

RESPUESTA: $$14 \cdot 3 + 15 \cdot 12 = 222 \ .$$

b) Dar una expresión de *todas* las soluciones enteras (x, y) de la ecuación

$$14x + 15y = n \ ,$$

para n dado, y probar que si $n > 14 \cdot 15$, alguna de ellas cumple $x, y > 0$.

RESPUESTA: *Las soluciones son:* $(x, y) = (-n, n) + m(15, -14)$, *con* $m \in \mathbb{Z}$: *una solución particular obvia + todas las de la ecuación:* $14x + 15y = 0$. *Que sean* $x, y > 0$ *equivale a que:*

$15m > n > 14m$, *es decir:* $\dfrac{n}{15} < m < \dfrac{n}{14}$, *y si* $n > 14 \cdot 15$, *es:* $\dfrac{n}{14} - \dfrac{n}{15} = \dfrac{n}{14 \cdot 15} > 1$,

luego hay algún entero m *en ese intervalo.*

Por ejemplo, para $n = 222$ *se tiene:* $\dfrac{222}{15} < 15 < \dfrac{222}{14}$, *que lleva a la respuesta de a).*