CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2011-2012. **HOJA 5.**

1) Hallar un múltiplo de 13 que al ser dividido por 2011 deje resto 3.

2) Hallar un número de tres cifras tal que dé restos 1, 2 y 3, al ser dividido por 7, 9 y 11 respectivamente.

3) He comprado bolígrafos a 1.01€ y rotuladores a 1.23€. Si me he gastado en total 22.18€, ¿cuántos he comprado de cada?

4) Calcula el resto al dividir 3^{2011} entre 101.

5) Si contamos con los dedos de una mano de la forma habitual (comenzando por el índice y acabando en el pulgar), ¿en qué dedo terminará la cuenta hasta 7^{7^7}? ¿Y si lo hace Homer Simpson que sólo tiene cuatro dedos?

6) Sea m un número impar no divisible por 5.

a) Demostrar que el desarrollo decimal de $1/m$ es periódico y que dicho periodo es de longitud un divisor de $\phi(m)$.
Por ejemplo $1/11 = 0.0909\ldots$ y $2 \mid \phi(11)$; $1/13 = 0.076923076923\ldots$ y $6 \mid \phi(13)$.
(Sugerencia: Al hacer la división larga el primer resto es 1, ¿cuándo vuelve a aparecer?).

b) Demostrar que si $1/n$ tiene periodo $n-1$ entonces n es primo. Encontrar algún número con esta propiedad.

7) Hallar la parte real y la parte imaginaria de

$$a)\ \frac{1-i}{1+i}, \qquad b)\ \frac{(3-i)(2+i)}{3+i}, \qquad c)\ \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2}, \qquad d)\ \Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3.$$

8) Expresar en forma polar:

$$a)\ 1+i, \qquad b)\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad c)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, \qquad d)\ -2-2i.$$

9) Calcular $\exp(2011\pi i)$, $\exp(\pi i/2)$, $\exp(\pi 3^{2011} i/2)$ y $\exp(-\pi i/4)$.

10) Hallar para qué numeros complejos z y w de módulo 1 se cumple $z+w=2$. ¿Cuándo se cumple $z+w=1$ con z y w de módulo 1?

11) Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números: $1+i$, $2-i$, $8-6i$, $-8-15i$, $15-8i$.

12) Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:

a) $z^2+3iz-3+i$,
b) $2z^2+4z+2+i$,
c) $z^2+(2+3i)z-7/2-7i$,
d) $z^2+(5+i)z+17i/4$.

13) En principio parece difícil hallar una fórmula para calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = 1/(x^2+1)$. Comprobar que es cierta la identidad

$$\frac{2i}{x^2+1} = \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}$$

y utilizarla para calcular $f^{(4)}(0)$. Establecer una fórmula general para $f^{(n)}(0)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

14) Demostrar la identidad

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}\big((N+\frac{1}{2})x\big)}{\operatorname{sen}(x/2)}$$

para x que no sea múltiplo entero de 2π.
(Sugerencia: Es la suma parcial de una progresión geométrica).

15) Utilizando las ideas aprendidas en el ejercicio anterior, demostrar que para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

$$\big(\tan\frac{\pi}{2N}\big)\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen}\frac{\pi n}{N} = 1.$$

16) Calcular los diferentes valores de $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[4]{16i}$ y de $(1+i)^n + (1-i)^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

17) Dado n, demostrar que la suma de todas las raíces n-ésimas de 1 es cero. (Sugerencia: Comprobar que esa suma no cambia al multiplicar por $e^{2\pi i/n}$).

18) Sea $z = 2e^{2\pi i/5} + 1 + 2e^{-2\pi i/5}$. Utilizando que $\sum_{k=1}^{5} e^{2\pi k i/5} = 0$ (por el problema anterior), probar que $z^2 = 5$. Deducir de ello una fórmula exacta para $\cos(2\pi/5)$.

19) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados, entonces su producto también lo es. (Sugerencia: $|x+iy|^2 = x^2+y^2$). Notando que $13 = 2^2+3^2$ y $29 = 2^2+5^2$, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $377 = a^2+b^2$.

20) Denotemos con $\operatorname{Im}(z)$ la parte imaginaria de z y sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1$. Probar las fórmulas

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{c^2+d^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{|z-i|^2}{\operatorname{Im}(z)} + 2 = a^2+b^2+c^2+d^2$$

para $z = (ai+b)/(ci+d)$.

21) a) Demostrar que la función $f(z) = (z-1)/(z+1)$ establece una biyección de los números complejos con parte real positiva a los que satisfacen $|z| < 1$.
b) ¿Cuál es la imagen por f de los z que tienen $|z| < 1$?
c) Dar una fórmula para la composición $g(z) = (f \circ f)(z)$ y usarla para explicar la relación entre las respuestas a los apartados a) y b).

22) Probar que, si $z \neq w$ son complejos con $|z|, |w| \leq 1$, se tiene: $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| \leq 1$.