CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2011-2012. **HOJA 3.**

1) Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, el número combinatorio $\binom{n}{k}$ se define como el número de subconjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos. A partir de la definición, demuestra las siguientes propiedades de los números combinatorios:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

2) Utilizar la definición de los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para demostrar que

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

3) Demostrar que para todo $n, k \in \mathbb{N}$ se tiene la siguiente expresión algebraica para los números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \le k \le n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(Derivar k veces la fórmula del problema anterior y evaluarla en $x = 0$)

4) Sea X un conjunto finito con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene X? ¿Cuántos subconjuntos tiene $X \times X$? ¿Cuántas funciones hay de X en $X \times X$?

5) Sea $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ un conjunto finito y llamemos $\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$. Demostrar que

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sigma_k.$$

6) Sea $X = \cup_{i \in I} A_i$ una **partición** de X; es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Demostrar que la relación "*$x\mathcal{R}y \iff x$ e y pertenecen al mismo A_i*", es una relación de equivalencia X.
Recíprocamente, probar que dada una relación de equivalencia sobre un conjunto X, las clases de equivalencia definen una partición de X.
En definitiva, podemos pensar siempre una relación de equivalencia como una partición.

7) Si $f : X \to V$ es una **función**, probar que "*$x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$*" define una relación de equivalencia en X, y que cada una de sus clases de equivalencia es la imagen inversa de un $z \in V$. Establecer una biyección entre el conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ y $Im(f)$.

8) Fijado un entero positivo b, definimos $b\mathbb{Z} = \{bk : k \in \mathbb{Z}\}$ y consideramos la relación sobre $\mathbb{Z}$ dada por: $m\mathcal{R}n \iff m - n \in b\mathbb{Z}$. Demostrar que es una relación de equivalencia.
Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente. Al conjunto cociente de esta relación lo denotamos por $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ (se lee $\mathbb{Z}$ módulo b).

9) Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.
i) $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(\bar{n}) = n$ (donde $\bar{n} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ denota la clase del entero n).
ii) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, g(n) = \bar{n}$.
iii) $G : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G((\bar{n}, \bar{m})) = \overline{n+m}$.
iv) $H : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad H((\bar{n}, \bar{m})) = \overline{nm}$.

10) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por: $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff xy = x'y'$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

11) Definimos en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ la relación $(n,m)\mathcal{R}(n',m') \iff \max\{n,m\}=\max\{n',m'\}$.
a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describe la clase de equivalencia del elemento $(2,2)$.
c) Describe el conjunto cociente.
d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

12) Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En F se define la siguiente relación:

$$f\mathcal{R}g \iff \textit{existe } r\in\mathbb{R},\ r>0 \textit{ tal que } f(x)=g(x) \textit{ para } |x|<r.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre F.

13) Considerar las relaciones en $\mathbb{Z}$ definidas por $m\mathcal{R}_1n \iff 5|(m+2n)$; $m\mathcal{R}_2n \iff 4|(9m+3n)$ ($k|\ell$ significa "k divide a ℓ").
a) Decidir si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son relaciones de equivalencia.
b) En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

14) Sean A,B y C tres conjuntos tales que $A\subset B\subset C$ y A equipotente a C. Utilizando los resultados del curso, demostrar que los tres conjuntos son equipotentes.

15) Definimos la siguiente relación en $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \iff x-y\in\mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

16) Sea B un subconjunto finito de un conjunto A.
En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación: $X\mathcal{R}Y \iff \mathrm{Card}(X\cap B)=\mathrm{Card}(Y\cap B)$.
a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente?

17) En $\mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}$ se define la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y$ si y sólo si $\min X=\min Y$.
a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
c) ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

18) Sean A y B dos conjuntos equipotentes. Sean A' y B' dos conjuntos también equipotentes. Demostrar lo siguiente:
a) $A\times A'$ es equipotente a $B\times B'$.
b) Si $A\cap B=\emptyset$ entonces $A\cup B$ es equipotente a $A\times\{0,1\}$
c) Si $A\cap A'=B\cap B'=\emptyset$ entonces $A\cup A'$ y $B\cup B'$ son equipotentes.

19) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, no es numerable.

20) Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1,\dots,a_n\in A$ son elementos de A, el conjunto $A\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ es equipotente a A.
(Sugerencia: quitarles a A y a $A\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ subconjuntos numerables apropiados.)

21) ¿Cuál es el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; b) $\mathbb{N}\times\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$; d) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$; e) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; f) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$;
g) El conjunto de todas las raíces reales de todos los polinomios con coeficientes reales;
h) El conjunto de todas las raíces reales (racionales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama "conjunto de los números algebraicos");
i) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen dos elementos;
j) El conjunto de los números reales $x\in[0,1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.