CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2011-2012. **HOJA 2.**

1) Razona si, para subconjuntos A, B del dominio de una función f se tendrá o no en general:

a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, b) $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$,

c) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$, d) $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.

Para cada inclusión, prueba que se cumple o da un contraejemplo.

2) ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuáles suprayectivas? ¿Es alguna de ellas biyectiva? (Empieza por asegurarte de que todas ellas son funciones, y entre los conjuntos que se indican).

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(m) = m + 2;$

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(m) = 2m - 7;$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - x^3;$

d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 + 4x;$

e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n(n + 1);$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1};$

g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2 + n + 1;$

h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(t) = t/(t + 1).$

3) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |2x + 1/2| - 1/2$, hallar su imagen, y $f(\mathbb{Z})$. Demuestra que f no es ni sobreyectiva ni inyectiva. Probar que, sin embargo, sí da una biyección entre $\mathbb{Z}$ y su imagen.

4) Sea $f : X \to Y$ una función. Definimos para cada subconjunto $A \subset Y$ la imagen inversa:

$$f^{-1}(A) = \{ x \in X \mid f(x) \in A \}.$$

Dados subconjuntos $Z, W \subset Y$, demuestra que

a) $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W);$

b) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W);$

c) $f(f^{-1}(Z)) = f(X) \cap Z;$

d) $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z).$

5) Estudiar si la siguiente función es inyectiva y/o sobreyectiva.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ A & \longrightarrow & f(A) = \{(n-1)/2 : (n \in A) \wedge (n \text{ es impar}\}. \end{array}$$

¿Quién es $f^{-1}(\emptyset)$?

6) Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow P = \{primos\}$ dos funciones definidas por

$f(n) =$ el mayor primo que divide a n , y $g(n) =$ el menor primo que divide a n.

a) Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.

b) ¿Quién es $f^{-1}(\{3\})$? ¿Quién es $g^{-1}(\{3\})$?

7) Usando la definición de $\log_b$ y la de '$\log(x) = \ln(x)$' , razona por qué para cada $x > 0$ se tiene:

$$\log(x) = \log(10)\log_{10}(x) = \log(2)\log_2(x) \ ; \quad \log_{10}(x) = \log_{10}(2)\log_2(x) \ .$$

Verifícalas para valores concretos de x con tu calculadora, y asegúrate de conciliar su notación y la nuestra.

8) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Dibuja los gráficos de las funciones f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.

b) Encuentra las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decide si son inyectivas y/o suprayectivas.

9) Dadas funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, probar las siguientes afirmaciones:

a) f inyectiva y g inyectiva $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva.

b) f sobre y g sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre.

c) Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.

d) Si g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es f, y es sobre si y sólo si lo es f.

e) Si además $X = Z$, la afirmación del apartado anterior también es cierta para $f \circ g$.

10) En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto que se especifica debajo. Decidir cuáles son **relaciones de orden**; en caso de serlo, estudiar si es o no un **orden total**; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

$\boxed{\begin{array}{c} x \geq y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} x < y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} |x| \leq |y| \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} A \subset B \\ A, B \in \mathcal{P}(X) \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} a \leq c \ \wedge \ b \leq d \\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \end{array}}$, $\boxed{\begin{array}{c} a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2} \\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \end{array}}$

Ojo: por convenio, '$\subset$' incluye el caso '$=$'; si se escribe '$\subseteq$', es para ayudar a recordarlo.

11) Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define en X la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Demostrar que la relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es inyectiva.

12) Para la relación de orden dada en $\mathbb{Z}^+$ por $\boxed{n|m}$, dar respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Tiene $\mathbb{Z}^+$ un máximo y/o un mínimo para esta relación?
b) ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$ tienen un máximo y cuáles un mínimo?
c) Dado un intervalo $A = \{k \in \mathbb{Z}^+ : n \leq k \leq m\}$, ¿qué debe cumplir un $k \in A$ para ser un elemento maximal de A? ¿Y para ser minimal?
d) ¿Cuáles son los minimales de $\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$?
e) ¿Qué proceso podríamos seguir para aislar los minimales de un intervalo dado?

13) Decimos que una relación de orden $\mathcal{R}$ en un conjunto X es un **buen orden**, si cada subconjunto no vacío $A \subset X$ tiene un mínimo, como sucede por ejemplo con el orden '$\leq$' en $\mathbb{N}$.

Probar que también están **bien ordenados** por '$\leq$' los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) La unión $X \cup Y$ de dos subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, si cada uno de ellos está bien ordenado.
b*) El conjunto $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$, si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, son dos sucesiones crecientes.

14) Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden establecido, y llamando "palabras" a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.

Usando el signo '$\leq$' para el orden de las "letras", dar una definición de cuándo la palabra '$a_1a_2 \ldots a_n$' precede a la '$b_1b_2 \ldots b_m$' : decir qué deben cumplir sus letras para ello.

Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo. Pero *¿será eso cierto para cualquier conjunto infinito de palabras?* (*) Probar que es cierto (y por lo tanto se trata de un *buen orden*), o dar un contraejemplo.

15) En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos la siguiente relación: $x\mathcal{R}y$ si x e y tienen el mismo signo y $|x| \leq |y|$.

a) Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.
b) Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo $[-3, 2)$.

16) Considera la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow f(n, m) = 2^n 3^m \end{aligned}$$

y las siguientes relaciones en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n, m)\mathcal{R}_1(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \leq f(n', m')$$
$$(n, m)\mathcal{R}_2(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \mid f(n', m')$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?

b) Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq n + m \leq 4\}$ para cada una de la relaciones de orden $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.