10.2. Soluciones desarrolladas

Nada se aprende mirando las soluciones sin haber estudiado antes la teoría e intentado los problemas. En algunos casos estas soluciones son un poco esquemáticas. Se deja al lector completar los detalles.

Números naturales, racionales y reales

1) a) O bien denominador y numerador son ambos positivos o bien son ambos negativos. El primer caso requiere $x < 1$ y $(x+2)(x-3) < 0$. Esto último ocurre sólo si $x \in (-2, 3)$, por tanto $x \in (-2, 1)$. El segundo caso requiere de la misma forma $x > 1$ y $(x+2)(x-3) > 0$ que se dan simultáneamente para $x > 3$.

Por consiguiente la solución es $(-2, 1) \cup (3, \infty)$.

b) Si $x \geq -1$ entonces la ecuación es $(x+1)+(x+3) < 5$ que equivale a $x < 1/2$. Si $-3 \leq x \leq -1$ entonces la ecuación es $-(x+1)+(x+3) < 5$ que se cumple siempre. Finalmente, si $x \leq -3$ entonces la ecuación es $-(x+1)-(x+3) < 5$ que equivale a $x > -9/2$.

Combinando estos tres casos se obtiene la solución $(-9/2, -3] \cup [-3, -1] \cup [-1, 1/2)$, es decir, $(-9/2, 1/2)$.

---

2) a) Falso por ejemplo para $x = 1$, $y = 2$.

b) $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq x + y \Leftrightarrow 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2$ y esto se cumple siempre porque el segundo miembro es $(x-y)^2$.

---

3) Claramente se cumple para $n = 1$ porque $1^2 = 1(1+1)(2+1)/6$. Ahora partiendo de la identidad del enunciado tenemos que llegar a la misma cambiando n por $n+1$. Con este fin sumamos $(n+1)^2$ en ambos miembros. El primer miembro es lo que esperamos y podemos manipular el segundo de la siguiente forma:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) = \frac{n+1}{6}\big(2n^2 + 7n + 6\big).$$

Factorizando, $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ y se obtiene entonces que la expresión anterior es $(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)/6$, como deseamos.

---

4) a) $x^4 < 9 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{3}$ que representa el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, por tanto $\text{ínf} = -\sqrt{3}$ y $\sup = \sqrt{3}$.

b) $x^5 < 9 \Leftrightarrow x < \sqrt[5]{9}$ por tanto no está acotado inferiormente y $\sup = \sqrt[5]{9}$.

c) Los elementos negativos son de la forma $-1 - \frac{1}{n}$ con n impar. Claramente su ínfimo es el que corresponde a $n = 1$, es decir, $\text{ínf} = -2$. El resto de los elementos son de la forma $1 - \frac{1}{n}$ con n par. El supremo es 1 porque van acercándose indefinidamente a este valor sin llegar a superarle.

Sucesiones y series

5) En cada caso tranformamos la fórmula para a_n para que sea más sencillo estudiar la convergencia

a) Dividiendo entre n^4,

$$a_n = \frac{3 - 2/n^4}{1 + 2/n^2 + 2/n^4}$$

que claramente converge con $\lim a_n = 3$.

b) Dividiendo entre 6^n,

$$a_n = \frac{1}{(5/6)^n + (-1)^n}.$$

Notando que $(5/6)^n \to 0$, se sigue que $\lim a_{2n} = 1$ mientras que $\lim a_{2n+1} = -1$, por tanto no existe $\lim a_n$. La sucesión no converge.

c) Sacando factor común n, multiplicando y dividiendo por el conjugado y, finalmente, dividiendo por n,

$$a_n = n\big(\sqrt{n^2+1} - n\big) = n\frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n^2} + 1}$$

que claramente converge con $\lim a_n = 1/2$.

---

6) a) La desigualdad $a_n < 2$ se cumple para $n = 1$. Si la suponemos cierta para un n, entonces $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$, que es la desigualdad para $n + 1$.

b) Consideramos las implicaciones

$$a_n \le a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; a_n \le \sqrt{2a_n} \;\Leftrightarrow\; a_n^2 \le 2a_n$$

y la última desigualdad es cierta porque $0 < a_n < 2$ (simplifíquese entre a_n). Por el teorema de Bolzano-Weierstrass la sucesión es convergente. digamos $l = \lim a_n$. Tomando límites en la recurrencia $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ se tiene $l = \sqrt{2l}$ y las posibilidades son $l = 0$ y $l = 2$. La primera es claramente imposible porque $a_1 = 1$ y la sucesión es creciente.

---

7) La desigualdad $(a+b)^2 \ge 4ab$ se cumple para todo $a, b \ge 0$ porque $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$.

a) La desigualdad anterior con $a = x_n$, $b = t/x_n$ implica que $x_{n+1}^2 \ge t$ de donde $\sqrt{t}$ es una cota inferior para la sucesión. Por otro lado, la cota superior 2 se sigue por inducción, ya que $x_n \le 2$ se cumple para $n = 1$ y suponiéndola para algún n, se deduce para $n + 1$ gracias a

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big) \le \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{\sqrt{t}}\big) \le \frac{1}{2}\big(2 + \sqrt{t}\big) \le 2.$$

b) Se tienen las implicaciones

$$x_{n+1} \le x_n \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big) \le x_n \;\Leftrightarrow\; \frac{t}{x_n} \le x_n \;\Leftrightarrow\; t \le x_n^2$$

y esta última desigualdad es cierta por el apartado anterior.

c) El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que existe el límite. Digamos que $L = \lim x_n$, entonces $L = \lim x_{n+1}$ y tomando límites en la fórmula que define la sucesión se deduce $L = \frac{1}{2}\big(L + \frac{t}{L}\big)$. Resolviendo esta ecuación en L se concluye $L = \sqrt{t}$ o $L = -\sqrt{t}$. La segunda posibilidad no es válida porque $x_n > 0$.

---

8) En cada caso llamamos a_n a la expresión que aparece dentro del sumatorio.

a) Se cumple $\lim a_n/(n2^{-n}) = 1$ y por comparación basta estudiar $\sum b_n$ con $b_n = n2^{-n}$ que converge por ejemplo por el criterio del cociente: $\lim b_{n+1}/b_n = 1/2 < 1$.

b) Converge por el criterio de la raíz ya que $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim 2^{1/\sqrt{n}}/n = 0 < 1$.

c) Veamos que la serie sin signos $\sum |a_n|$ converge, por ello la original también converge. Por comparación $\sum |a_n|$ y $\sum 1/n^2$ tienen el mismo carácter, y esta última serie converge por ejemplo por el criterio de condensación.

d) Transformamos un poco primero la serie multiplicando y dividiendo por el conjugado,

$$a_n = \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^2 = \frac{\big(n+1-n\big)^2}{\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\big)^2} = \frac{1}{\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\big)^2}.$$

Es fácil ver que $\lim a_n/(n^{-1}) = 1$ por tanto $\sum a_n$ tiene el mismo carácter que la serie armónica $\sum n^{-1}$, que no converge usando por ejemplo el criterio de condensación.

---

9) Como antes, llamemos en cada caso a_n a la expresión que aparece dentro del sumatorio.

a) Si $\alpha > 0$ entonces $\lim a_n = \infty$ y la serie no converge. Si $\alpha = 0$, $a_n = (n^2+1)^{-1}$ que se puede comparar con $1/n^2$ o aplicar el criterio de la integral, siendo convergente. Finalmente, para $\alpha < 0$, $a_n \le (n^2+1)^{-1}$ y también converge por comparación.

b) Multiplicando y dividiendo por el conjugado se sigue que $\lim a_n/n^{-\alpha} = 1$ y la serie tiene el mismo caracter que $\sum n^{-\alpha}$ la cual converge exactamente para $\alpha > 1$.

c) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(\frac{\frac{(2n+3)!}{(n+2)!(n+1)!}}{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}} \right)^{\alpha} = \lim \left(\frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+2)(n+1)} \right)^{\alpha} = 4^{\alpha}.$$

Entonces la serie converge para $\alpha < 0$ y no converge para $\alpha > 0$. Tampoco lo hace para $\alpha = 0$, ya que en este caso $\lim a_n = 1$.

---

10) La serie es $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n = r^n\big(1+\frac{1}{n}\big)^{-n} n^{-1}$. Se cumple

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim r\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{-1} n^{-1/n} = r \cdot 1 \cdot 1 = r,$$

donde se ha usado $\lim n^{1/n} = \lim e^{(\log n)/n} = e^0 = 1$.

Por el criterio de la raíz, si $0 < r < 1$ la serie sin signos $\sum a_n$ converge y por tanto S también converge (absolutamente).

Si $r > 1$, claramente $\lim a_n = \infty$ (nótese que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$) y por tanto S no converge.

Finalmente, para $r = 1$, S converge por el criterio de Leibniz, ya que en este caso $\lim a_n = 0$ y a_n decrece. Esta última afirmación requiere recordar que la sucesión que define el número e, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, es monótona creciente.

---

11) Dando valores se obtiene 1, $\sqrt{2} = 1{,}41\dots$, $\sqrt{1+\sqrt{2}} = 1{,}55\dots$, $\dots$ entonces si es monótona debe ser creciente. Para comprobarlo seguimos las implicaciones

$$a_{n+1} \ge a_n \;\Leftrightarrow\; \sqrt{1+a_n} \ge a_n \;\Leftrightarrow\; 1 + a_n - a_n^2 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; a_n \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Donde se ha usado que $a_n \ge 0$ y que $-x^2 + x + 1 = 0$ tiene a $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$ como soluciones. Entonces es monótona creciente si y sólo si está acotada superiormente por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Esto se sigue por inducción:

Claramente $a_1 = 1 \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y suponiendo $a_n \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se deduce

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \le \sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

En definitiva, a_n es monótona creciente, está acotada superiormente por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e inferiormente por $a_1 = 1$. El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que converge. Digamos $l = \lim a_n$, entonces al tomar límites en $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ se sigue $l = \sqrt{1+l}$ que conduce a $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

---

12) Es más conveniente escribir la sucesión como

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)}{n^\alpha\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)} = \frac{4}{n^\alpha\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)}.$$

El denominador tiende a ∞ si $\alpha > -1/2$, tiende a cero si $\alpha < -1/2$ y tiende a 2 si $\alpha = -1/2$. Por tanto la sucesión converge si y sólo si $\alpha \ge -1/2$, en otro caso $\lim a_n = \infty$.

A partir de $\lim n^{\alpha+\frac{1}{2}} a_n = 2$ se deduce que $\sum_{n=2}^\infty a_n$ y $\sum_{n=2}^\infty n^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ tienen el mismo carácter. La segunda serie converge si y sólo si $\alpha + 1/2 > 1$ (por ejemplo por el criterio de condensación o por el de la integral), esto es, para $\alpha > 1/2$.

Funciones continuas y sus propiedades

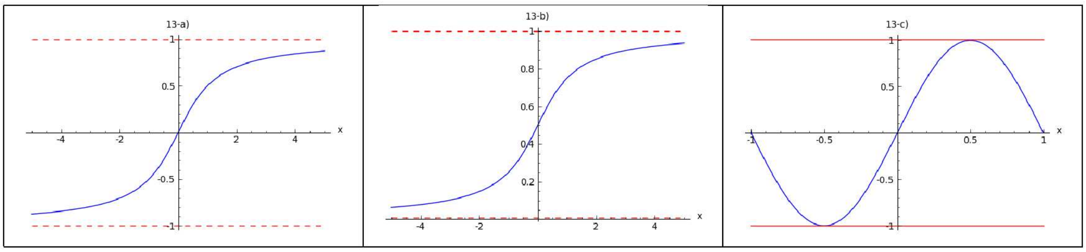
13) En cada apartado hay muchas soluciones posibles.

a) Por ejemplo $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan x$. Quizá es más sencillo pensar en ejemplos definidos a trozos como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \ge 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

b) $g(x) = \big(1 + f(x)\big)/2$ con f como en el apartado anterior.

c) $h(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$. Nótese que $|h(x)| \le 1$ y $h(\pm 1/2) = \pm 1$.



14) Los posibles problemas aparecen en los límites en puntos de la frontera.
a) No. La función no está acotada:

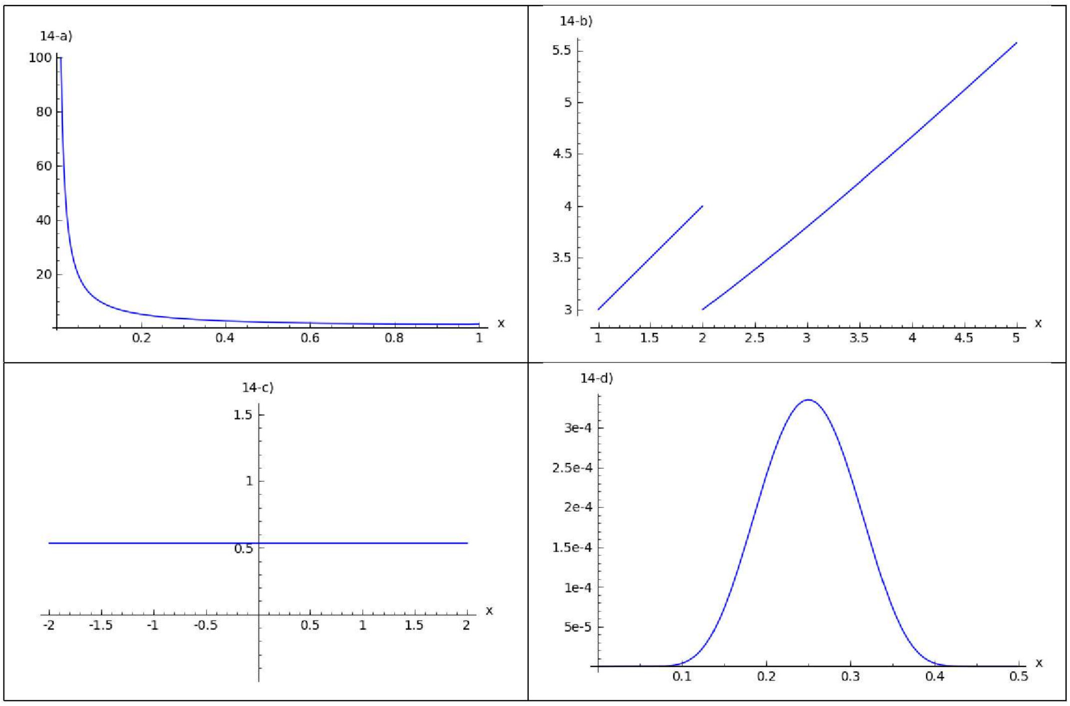
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \infty.$$

b) No. Los límites laterales en $x = 2$ no coinciden:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3.$$

c) Sí. De hecho $f(x) = \cos 1$ en todo su dominio de definición porque $\cos 1 = \cos(-1)$.
d) Sí. Basta definir $f(x) = 0$ fuera de $(0, 1/2)$ porque

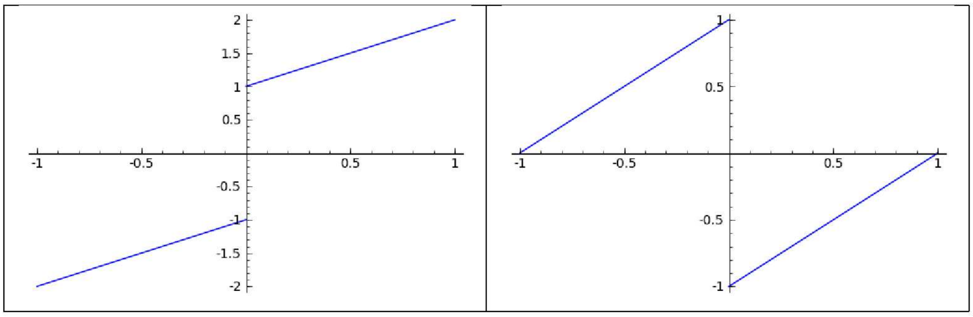
$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^{-1}\left(\frac{1}{2}-x\right)^{-1}} \qquad \text{implica} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1/2^-} f(x) = 0.$$



15) Las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geq 0 \\ -1+x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} -1+x & \text{si } x \geq 0 \\ 1+x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

verifican $f(x) + g(x) = 2x$ y $f(x) \cdot g(x) = x^2 - 1$.



La derivada y sus propiedades básicas

16) Para la primera función:

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1/(t^2|t|+1) - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-t|t|}{t^2|t|+1} = 0.$$

Para la segunda:

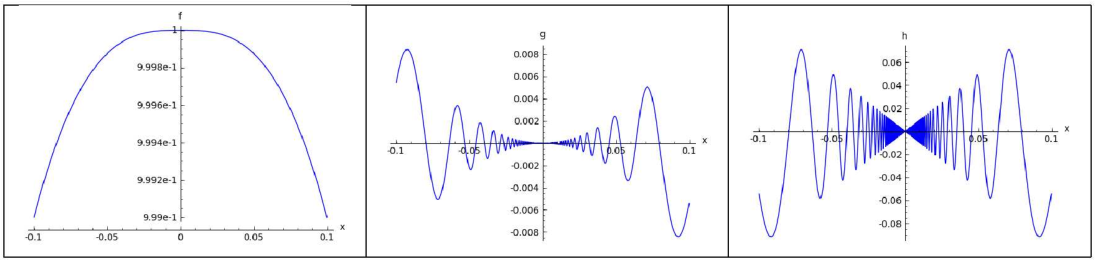
$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(0+t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \operatorname{sen}(1/t)}{t} = \lim_{t \to 0} t \operatorname{sen}(1/t) = 0$$

porque $\operatorname{sen}(1/t)$ está acotado y t tiende a cero.

Sin embargo para la tercera función se llega con el mismo argumento a

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(0+t) - h(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t \operatorname{sen}(1/t)}{t} = \lim_{t \to 0} \operatorname{sen}(1/t)$$

que no existe porque el seno de ángulos grandes no se aproxima a ningún valor en particular, sino que oscila.



---

17) En todos los casos se aplica que la recta tangente en $x = a$ viene dada por la fórmula $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Por tanto todo el trabajo está en hacer las derivadas.

a) Recta $y = e^{-1}x + 1$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{e + \sin(x)}, \qquad f'(0) = e^{-1} \qquad \text{y} \qquad f(0) = 1.$$

b) Recta $y = x$

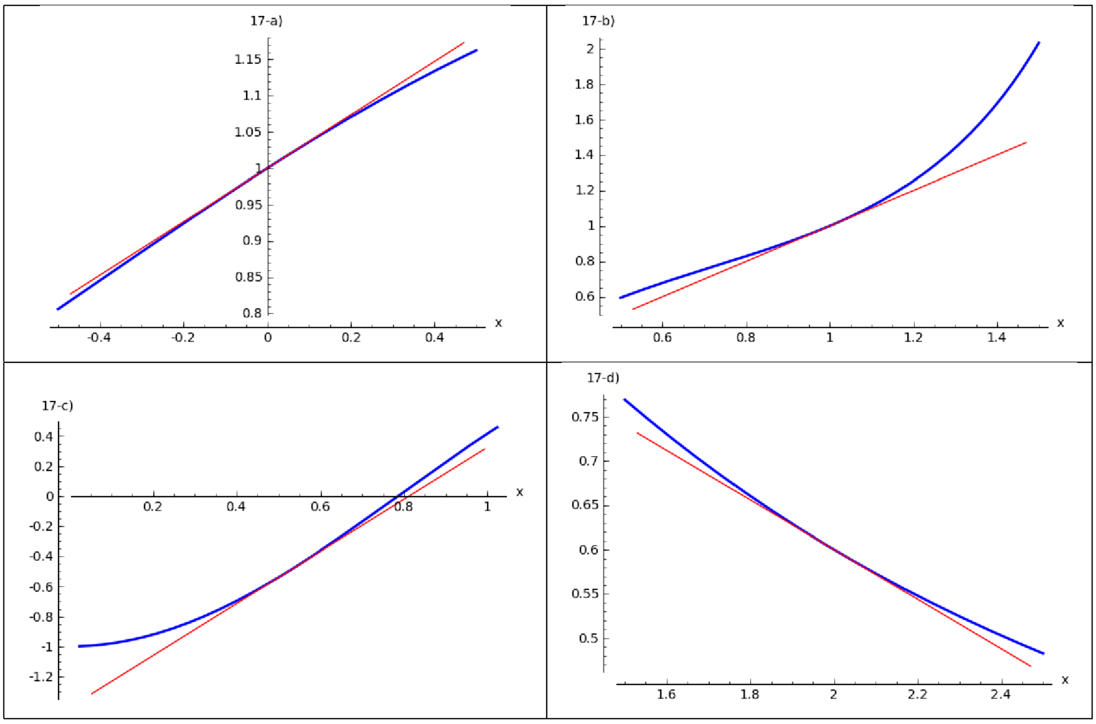
$$f'(x) = \left((2\,x - 1)\log(x) + \frac{x^2 - x + 1}{x}\right)x^{\left(x^2 - x + 1\right)}, \qquad f'(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1.$$

c) Recta $y = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$

$$f'(x) = 4\,\sin(x)\cos(x)\,, \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

d) Recta $y = -\frac{7}{25}x + \frac{29}{25}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2\,(x + 1)x}{\left(x^2 + 1\right)^2}, \qquad f'(2) = -\frac{7}{25} \qquad \text{y} \qquad f(2) = \frac{3}{5}.$$



---

18) Se va derivando sucesivamente

$$\begin{aligned}(fg)' =& f'g + fg'\\ (fg)'' =& f''g + 2f'g' + fg''\\ (fg)''' =& f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.\end{aligned}$$

Teoremas sobre derivación

19) Simplemente hay que derivar la fórmula para $(f^{-1})'$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \qquad \Rightarrow \qquad (f^{-1})''(x) = -\frac{1}{\big(f'\big(f^{-1}(x)\big)\big)^2} \cdot f''\big(f^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

---

20) *a*) Definiendo $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$ se cumple $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ por tanto hay a lo más una solución, y $f(0) = -1 < 0 < f(\pi) = 2\pi - 1$ implica que hay uno en $[0, \pi]$ Por tanto hay solución única y está en $[0, 1]$.

b) Tomamos $f(x) = 2x^3 + ax - a$. De nuevo se tiene $f' > 0$ y $f(0) < 0 < f(1)$.

c) La función $f(x) = x^5 - 5x - 3$ cumple $f'(x) < 0$ en $(-1, 1)$ y $f'(x) > 0$ en $\mathbb{R} - [-1, 1]$. Se tiene $f(-2) < 0 < f(-1)$ por tanto hay solución única en $(-\infty, 1)$. De la misma forma, $f(1) < 0 < f(-1)$ y el signo constante de la derivada en $(-1, 1)$ implica que hay solución única en $(-1, 1)$. El mismo argumento se aplica a $(1, \infty)$ ya que $f(1) < 0 < f(2)$. En total hay tres soluciones en $\mathbb{R}$.

---

21) Una posibilidad es calcular las derivadas y sustituir en la fórmula, pero para f empleamos los polinomios de Taylor de orden 3 de $\log(1 + x)$ y de $\operatorname{sen} x$ que son respectivamente

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \qquad \text{y} \qquad x - \frac{x^3}{3}.$$

sustituyendo la segunda en la primera y extrayendo los términos de grado menor o igual que 3 se obtiene el polinomio deseado:

$$\big(x - \frac{x^3}{3}\big) - \frac{1}{2}\big(x - \frac{x^3}{3}\big)^2 + \frac{1}{3}\big(x - \frac{x^3}{3}\big)^3 \qquad \Rightarrow \qquad T_{3,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Para g calculamos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(3 + e^x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{-e^x(3 + e^x)^2 + 2e^{2x}(3 + e^x)}{(3 + e^x)^2} = \frac{e^{3x} - 9e^x}{(3 + e^x)^4}$$

y

$$f'''(x) = \frac{3\left(e^{3\,x} - 3\,e^{x}\right)}{\left(e^{x}+3\right)^{4}} + \frac{-4\left(e^{3\,x} - 9\,e^{x}\right)e^{x}}{\left(e^{x}+3\right)^{5}}.$$

De aquí $f(0) = \frac{1}{4}$, $f'(0) = -\frac{1}{16}$, $f''(0) = -\frac{1}{32}$ y $f''(0) = \frac{1}{128}$. Entonces

$$T_{3,0}(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{768}x^3.$$

---

22) Para resolver este ejercicio usamos las series de Taylor de $\log(1+x)$ y $\operatorname{sen} x$ que son:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

La primera converge en $(-1,1]$ y la segunda en todo $\mathbb{R}$. La convergencia de la primera serie en $x=1$ se deduce del criterio de Leibniz y su no convergencia en $x=-1$ de que es la serie armónica. En el resto de los casos basta el criterio del cociente sobre las series sin signos.

Efectuando las operaciones indicadas en el enunciado se obtiene

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n}, \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{6n+5}}{(2n+1)!}, \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Para $c)$ la definición en $x=0$ asegura la continuidad. La serie de $a)$ converge en $[-1,1]$ y las otras en todo $\mathbb{R}$.

Aplicaciones de la derivada

23) En todos los casos denotamos con L el límite a calcular.

$a)$ Regla de L'Hôpital dos veces:

$$L \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-\pi\operatorname{sen}(\pi x)}{2x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

$b)$ Regla de L'Hôpital dos veces simplificando:

$$L \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-6\tan(6x)}{-3\tan(3x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}(6x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{12\cos(6x)}{3\cos(3x)} = 4.$$

En la segunda igualdad se ha usado que $\cos(3x)/\cos(6x) \to 1$ cuando $x \to 0^+$.

$c)$ Se toman logaritmos primero y después se usa la regla de L'Hôpital una vez:

$$\log L = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L = e^0 = 1.$$

d) Se cambia la variable y se emplea la regla de L'Hôpital una vez:

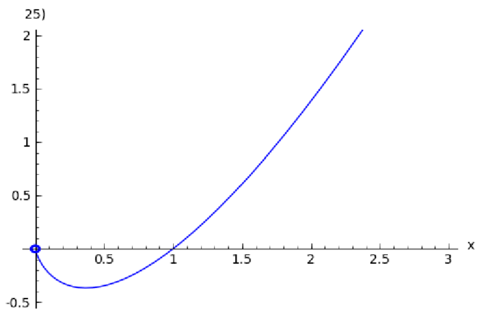
$$L \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(ay)}{y} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{a\cos(ay)}{1} = a.$$

---

24) Digamos que x es la longitud del lado paralelo a la pared e y es la longitud de cada uno de los dos lados perpendiculares a la pared. La condición de área es $xy = 20$. La longitud es $L(x) = x + 2y = x + 40/x$. El único punto crítico con $x > 0$ es $x = 2\sqrt{10}$ porque resuelve $f'(x) = 1 - 40/x^2 = 0$. Se alcanza un mínimo porque f decrece en $[0, 2\sqrt{10}]$ y crece en $[2\sqrt{10}, \infty)$. El otro lado es $y = 20/x = \sqrt{10}$. Entonces la longitud de cercado es $4\sqrt{10}$ y la relación entre los lados es 2.

---

25) El dominio de esta función es $(0, \infty)$ porque el logaritmo sólo existe para números positivos.



El único corte con los ejes es $x = 1$ (el valor para el que se anula el logaritmo), aunque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Éste límite y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ prueban que no hay asíntotas.

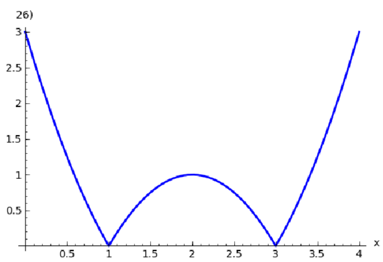
Calculamos la derivada $f'(x) = \log x + 1$. La solución de $\log x + 1 = 0$ es $x_0 = e^{-1}$. Para $0 < x < x_0$ se tiene $\log x < -1$ y para $x > x_0$, $\log x > -1$, entonces la función decrece en $(0, x_0)$ y crece en (x_0, ∞) alcanzando por tanto un mínimo (global) en $x = x_0$ que es $f(x_0) = -e^{-1}$.

Derivando una vez más $f''(x) = 1/x$ que es positiva en $(0, \infty)$. Por consiguiente la función es convexa en todo su dominio y no hay puntos de inflexión.

---

26) Factorizando, $f(x) = |g(x)|$ con $g(x) = (x-1)(x-3)$ que es ≤ 0 exactamente en $[1, 3]$. Entonces

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{si } x \in [1,3] \\ g(x) & \text{si } x \in [0,1] \cup [3,4]. \end{cases}$$



Se cumple $g'(x) = 2x - 4$ que se anula en $x = 2$, además $g'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$. Por tanto $-g$ es creciente en $[1, 2]$ y decreciente en $[2, 3]$; mientras que g es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[3, 4]$. Entonces se alcanzan mínimos locales de f en $x = 1$ y $x = 3$. Como $f(1) = f(3) = 0$, el mínimo alcanzado es cero que de hecho es global (un valor absoluto es siempre no negativo).

De la misma forma, se alcanzan máximos locales en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$. De $f(0) = f(4) = 3$ y $f(2) = 1$, se sigue que 3 es el máximo global (alcanzado en $x = 0$ y $x = 4$) mientras que 1 es máximo local (alcanzado en $x = 2$)

---

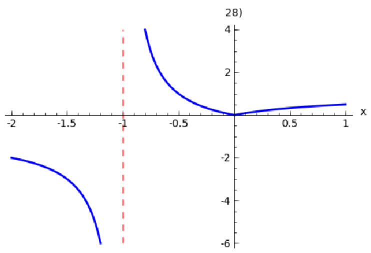
27) Es de tipo 0/0 y se puede aplicar la regla de L'Hôpital. Para simplificar los cálculos se puede usar previamente (pero no es imprescindible) que $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x+a}\sqrt{x-a}$ y que $\sqrt{x+a} \to \sqrt{2a}$ si $x \to a^+$. Entonces

$$L = \frac{1}{\sqrt{2a}} \lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \lim_{x \to a^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \lim_{x \to a^+} \Big(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}} + 1 \Big)$$

y se tiene $L = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

---

28) Se distinguen dos casos según el signo de x.



La función para $x > 0$ es $f(x) = x/(1+x)$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0.$$

Por tanto f es creciente en $(0, \infty)$.

Si $x < 0$ hay que excluir $x = -1$ donde $f(x) = -x/(1+x)$ no está definida. La derivada es la negativa de la anterior, por tanto f es decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$.

---

29) Claramente $|x|/x = 1$ si $x > 0$ y $|x|/x = -1$ si $x < 0$. Entonces

$$\lim_{x \to 0^+} e^{|x|/x} = e^1 \quad \neq \quad \lim_{x \to 0^-} e^{|x|/x} = e^{-1}.$$

Por tanto el primer límite no existe.

Para el segundo nótese que $\cos x \to 1$ cuando $x \to 0$. Esto permite escribir M como

$$M = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \frac{\arctan(x/2)}{\operatorname{sen}(2x)}.$$

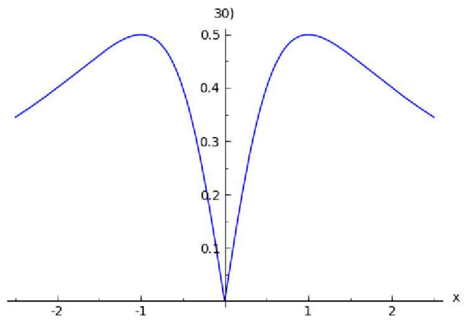
El límite de cada uno de los factores se calcula fácilmente con la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x/2)}{\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1/2}{1+(x/2)^2}}{2\cos(2x)} = \frac{1}{4}.$$

Lo que prueba $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

---

30) El eje $y = 0$ es una asíntota horizontal porque $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. No hay asíntotas verticales porque f es de hecho continua (es cociente de funciones continuas).



Para el resto de los apartados distinguiremos $x > 0$ y $x < 0$ porque en $x = 0$ el valor absoluto no es derivable.

Si $x > 0$, $f'(x) = \frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ que se anula en $x = 1$ pasando de positiva a negativa. Entonces se alcanza un máximo local en $x = 1$.

Si $x < 0$, $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ que se anula en $x = -1$ y procediendo como antes se comprueba que se alcanza un máximo local en $x = 1$. De hecho esto se puede deducir sn ningún cálculo observando que f es par, es decir, que $f(x) = f(-x)$.

Claramente en $x = 0$ se alcanza un mínimo global porque $f(0) = 0 \le f(x)$. También $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$ es un máximo global porque $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y no hay otros máximos.

Derivando de nuevo, para $x > 0$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

que se anual en $x = \sqrt{3}$ pasando de negativa a positiva. Así pues f es cóncava en $(0, \sqrt{3})$ y convexa en $(\sqrt{3}, \infty)$. Por la simetría par también es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0)$ y convexa en $(-\infty, -\sqrt{3})$.

La integral y técnicas de integración

31) En todos los casos se emplea el teorema fundamental del cálculo en la forma:

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt \qquad \Rightarrow \qquad F'(x) = h\big(g(x)\big)g'(x) - h\big(f(x)\big)f'(x)$$

que se deduce de la versión habitual escribiendo la integral como

$$F(x) = \int_a^{g(x)} h(t)\,dt + \int_{f(x)}^a h(t)\,dt = \int_a^{g(x)} h(t)\,dt - \int_a^{f(x)} h(t)\,dt.$$

Los resultados son:

a) $(1+x^2)^{-2}$, *b)* $(1+x^4)^{-3}\cdot 2x$,

c) $(1+x^4)^{-3}\cdot 2x - (1+x^6)^{-3}\cdot 3x^2$, *d)* $-\dfrac{e^{7x}}{1+e^{4x}}$.

---

32) Llamemos I a la integral. Integrando por partes con $u = 9x^2$ y $dv = e^{-5x+3}\,dx$ se tiene

$$I = -\frac{9x^2}{5}e^{-5x+3} + \frac{18}{5}\int xe^{-5x+3}\,dx.$$

Integrando una vez más por partes con $u = x$ y $dv = e^{-5x+3}\,dx$, se termina de calcular I:

$$I = -\frac{9x^2}{5}e^{-5x+3} + \frac{18}{5}\Big(-\frac{x}{5}e^{-5x+3} - \frac{1}{25}e^{-5x+3}\Big) = -e^{-5x+3}\Big(\frac{9}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{18}{125}\Big).$$

---

33) En ambos casos son funciones racionales y hay que calcular su descomposición en fracciones simples.

a) Las raíces son simples y reales, entonces

$$\frac{x}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \qquad \Rightarrow \qquad x = A(x-3) + B(x+1)$$

que sustituyendo $x = -1$ y $x = 3$ da lugar a $A = -1/4$ y $B = 3/4$. Y la integral es

$$\frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{3}{4}\log|x-3| + K.$$

b) La raíz $x = -3$ está repetida y entonces corresponde a dos fracciones simples:

$$\frac{2}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \quad \Rightarrow \quad 2 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1).$$

Sustituyendo $x = 1$ y $x = -3$ se sigue $A = 1/8$ y $C = -1/2$. Por ejemplo comparando los coeficientes de x^2 se obtiene $B = -1/8$. Integrando término a término, el resultado final es

$$\frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+3| + \frac{1}{2}(x+3)^{-1} + K.$$

---

34) El factor $x^2 + 2x + 2$ tiene raíces complejas, mientras que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, por tanto buscamos una descomposición en fracciones simples de la forma

$$\frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Comparando los numeradores

$$5x^2 + 5 = A(x+1)(x^2+2x+2) + B(x-1)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x^2-1).$$

Sustituyendo $x = -1$ y $x = 1$ se tiene $B = -5$ y $A = 1$. Comparando los coeficientes de x^3 se deduce $C = 4$ y comparando los términos independientes $D = 7$.

La integral es entonces

$$\log|x-1| - 5\log|x+1| + \int \frac{4x+7}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Completando cuadrados el denominador en el integrando es $(x+1)^2 + 1$ por tanto el cambio de variable $t = x + 1$ lleva a

$$\int \frac{4t+3}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\log(t^2+1) + 3\arctan t.$$

Deshaciendo el cambio se obtiene finalmente que la integral buscada es

$$\log|x-1| - 5\log|x+1| + 2\log(x^2+2x+2) + 3\arctan(x+1) + K.$$

---

35) En ambas integrales lo más natural es hacer un cambio de variable.
a) Con $x = t^2$ eliminamos la raíz cuadrada:

$$\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx \underset{x=t^2}{=} 2\int_0^1 te^{-t}\,dt = 2\big(-te^{-t} - e^{-t}\big)\Big|_0^1 = 2 - 4e^{-1}.$$

b) Con $x = \log t$ (o equivalentemente $t = e^x$) obtenemos una integral racional:

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}\,dx \underset{x=\log t}{=} \int_1^e \frac{dt}{\big(t+\frac{4}{t}\big)t} = \int_1^e \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}\int_1^e \frac{dt}{(t/2)^2+1} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\Big|_1^e.$$

Sustituyendo los límites, el resultado es $\frac{1}{2}\arctan\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

---

36) El procedimiento habitual es integrar por partes repetidamente para bajar el grado. La primera vez elegimos $u = x^3$, $dv = \cos x\,dx$

$$I = x^3\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} - 3\int_0^{\pi/2} x^2\operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi^3}{8} - 3I_1 \qquad \text{con} \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} x^2\operatorname{sen} x\,dx.$$

Esta integral se hace de nuevo por partes con $u = x^2$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$

$$I_1 = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = 2I_2 \qquad \text{con} \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx.$$

Finalmente, se integra por partes I_2 con $u = x$, $dv = \cos x\,dx$

$$I_2 = x\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Las relaciones

$$I = \frac{\pi^3}{8} - 3I_1, \qquad I_1 = 2I_2 \qquad \text{e} \qquad I_2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

implican

$$I = \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6.$$

---

37) Es una indeterminación del tipo 0/0. Aplicando la regla de L'Hôpital en combinación con el teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt}{xe^{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x}$$

que de nuevo es del tipo 0/0. Una nueva aplicación de la regla de L'Hôpital conduce al resultado

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}}{1} = 2.$$

---

38) Para $x = 1$ la integral es

$$f(1) = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^4}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+(t^2)^2}\cdot 2t\,dt = \arctan(t^2)\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

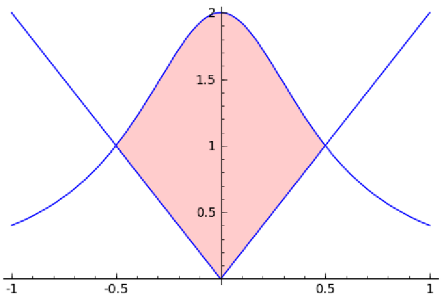
El teorema de la función inversa asegura que en $(0,\infty)$ la función f tiene una inversa derivable, ya que $f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} > 0$. Además

$$\big(f^{-1}\big)'(\pi/4) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(\pi/4)\big)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2/(1+1^4)} = 1,$$

donde se ha usado en la segunda igualdad $f(1) = \pi/4$.

Aplicaciones de la integral

39) Ambas funciones tienen simetría par por tanto basta considerar el área limitada cuando $x \geq 0$ y multiplicarla por dos.



Para $x \geq 0$, $g(x) = 2x$ y la única intersección de ambas gráficas se produce en $x = 1/2$, porque

$$\frac{2}{4x^2+1} = 2x \quad\Rightarrow\quad 1 = x(4x^2+1)$$
$$\Rightarrow\quad 0 = (2x-1)(2x^2+x+1) \quad\Rightarrow\quad x = \frac{1}{2}$$

ya que $2x^2+x+1 = 0$ no tiene raíces reales.

En $x \geq 0$ la función f decrece y la función g crece, por consiguiente la gráfica de f está por encima en $(0,1/2)$ y el área buscada es

$$A = 2\int_0^{1/2} \Big(\frac{2}{4x^2+1} - 2x\Big)\,dx = 2\int_0^{1/2} \frac{2}{(2x)^2+1}\,dx - 4\int_0^{1/2} x\,dx.$$

Cada una de estas integrales es elemental, resultando

$$A = 2\arctan(2x)\big|_0^{1/2} - 2x^2\big|_0^{1/2} = 2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-1}{2}.$$

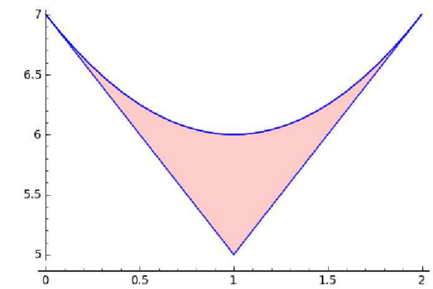
---

40) En primer lugar calculamos las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$

$$f(0) = 7, \quad f'(0) = -2 \quad \longrightarrow \quad y = -2(x-0)+7$$
$$\longrightarrow \quad y = -2x+7.$$

y

$$f(2) = 7, \quad f'(2) = 2 \quad \longrightarrow \quad y = 2(x-2)+7$$
$$\longrightarrow \quad y = 2x+3.$$



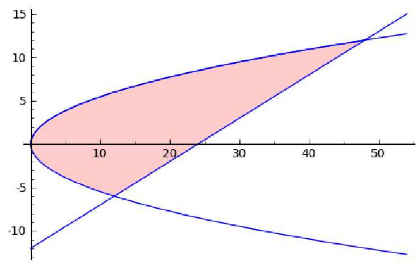
La intersección de estas rectas tangentes se produce, resolviendo el sistema, en $x = 1$, $y = 5$. La función f es convexa ($f'' > 0$), así pues las tangentes quedan por debajo de la gráfica y el área viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \big((x^2-2x+7)-(-2x+7)\big)\,dx + \int_1^2 \big((x^2-2x+7)-(2x+3)\big)\,dx \\ &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \big(x^2-4x+4\big)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \big(x-2\big)^2\,dx = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Es posible emplear también la simetría de la figura para llegar más rápido a la solución.

---

41) Comenzamos buscando los puntos en los que se cortan.



Despejando e igualando la variable x en ambas ecuaciones se sigue $2y + 24 = y^2/3$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtienen los dos puntos de intersección $(x, y) = (12, -6)$ y $(x, y) = (48, 12)$.

La curva $y^2 = 3x$ es una parábola girada 90 grados respecto a su posición habitual (intercambiar la x y la y) y la recta tiene pendiente $1/2$. Entonces el segmento de recta que queda dentro de la parábola es el que corresponde a $x \in [12, 48]$ y el área de la región viene dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{12} \big(\sqrt{3x} - (-\sqrt{3x})\big)\,dx + \int_{12}^{48} \big(\sqrt{3x} - (\frac{x}{2} - 12)\big)\,dx \\ &= \sqrt{3}\int_0^{12} \sqrt{x}\,dx + \sqrt{3}\int_0^{48} \sqrt{x}\,dx + \int_{12}^{48} \big(-\frac{x}{2} + 12\big)\,dx. \\ &= 48 + 384 + (-540 + 432) = 324. \end{aligned}$$

Una alternativa para simplificar un poco los cálculos es integrar con respecto de y, o dicho de otra forma resolver el problema intercambiando x e y en el enunciado. Con ello se evitan las raíces cuadradas.

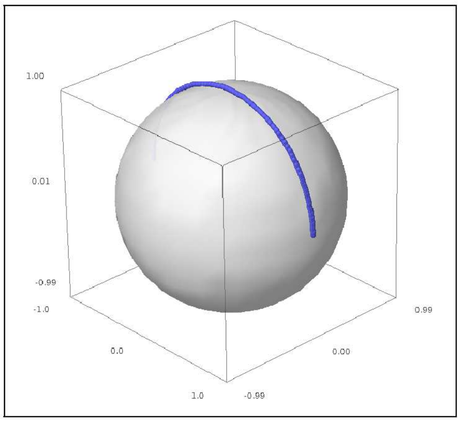
---

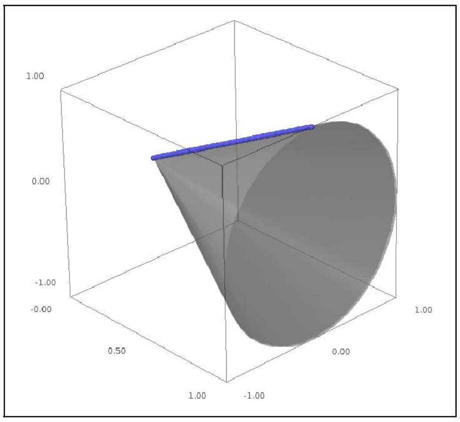
42) La esfera de radio r se obtiene al hacer girar la semicircunferencia $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ de radio r alrededor del eje X. Por tanto su volumen es

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \big(\sqrt{r^2-x^2}\big)^2\,dx = \pi \int_{-r}^{r} \big(r^2 - x^2\big)\,dx = \pi\big(2r^3 - 2\frac{r^3}{3}\big) = 4\pi\frac{r^3}{3}.$$

El cono se obtiene girando alrededor del eje X el segmento que une $(0,0)$ con (h,r). La ecuación de tal segmento es $y = rx/h$ con $x \in [0,h]$. Aplicando la fórmula el volumen es

$$V = \pi \int_0^h \big(\frac{rx}{h}\big)^2\, dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$



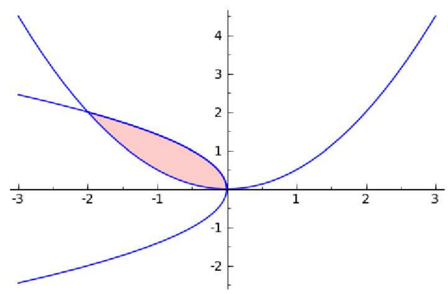


---

43) Las desigualdades sólo indican a qué lado de las curvas fronteras están las regiones. En el primer caso es en la zona de los y grandes y en el segundo en el de los x pequeños.

La frontera de estas regiones son las parábolas $2y - x^2 = 0$ y $2x + y^2 = 0$. Resolviendo el sistema se deduce que los puntos de intersección son $(0,0)$ y $(-2,2)$.

Despejando la y se tiene $y = x^2/2$ e $y = \pm\sqrt{-2x}$. La intersección se produce en la rama con signo positivo, además para $x \in [-2,0]$ se cumple $\sqrt{-2x} \ge x^2/2$, por tanto el área es



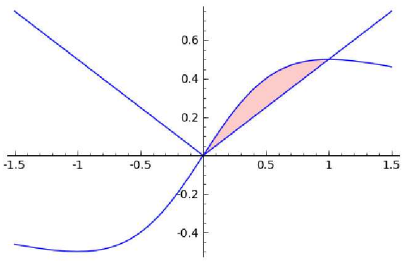
$$A = \int_{-2}^0 \big(\sqrt{-2x} - \frac{x^2}{2}\big)\, dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3}.$$

Para hallar el volumen del cuerpo engendrado por dicha region al girar alrededor del eje X restamos el volumen correspondiente al giro de la gráfica de arriba menos el correspondiente al giro de la de abajo. Esto es

$$V = \pi \int_{-2}^0 \big(\sqrt{-2x}\big)^2\, dx - \pi \int_{-2}^0 \big(\frac{x^2}{2}\big)^2\, dx = -\pi x^2\Big|_{-2}^0 - \frac{\pi}{12}x^3\Big|_{-2}^0 = \frac{10\pi}{3}.$$

---

44) Como veremos, la parte $x < 0$, y por tanto el valor absoluto, es irrelevante.



Claramente hay una intersección para $x = 0$. Si $x > 0$, $x/(1 + x^2) = x/2$ implica $2 = 1 + x^2$ y de aquí $x = 1$. Si $x < 0$, $x/(1 + x^2) = -x/2$ implica $-2 = 1+x^2$, que no tiene solución. Entonces $x \in [0, 1]$ en la región buscada. Además la gráfica de la primera función está por encima ya que $x/(1 + x^2) \geq x/2$ en $[0, 1]$. El área es por tanto,

$$A = \int_0^1 \Big(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2}\Big)\, dx = \Big(\frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{x^2}{4}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}.$$

10.3. Generación de gráficas

En las soluciones desarrolladas hay algunas gráficas. Aquí están los programas Sage que las generan.

Problema 13

```
# 13                (Sage)
f = 2*arctan(x)/pi
# a)
p = plot( f ,x, -5,5)
p += plot(1.0,x, -5, 5, color='red', linestyle='--')
p += plot(-1.0,x, -5, 5, color='red', linestyle='--')
p.axes_labels(['x','13-a)'])
show(p)
# b)
p = plot( (1+f)/2 ,x, -5,5)
p += plot(1.0,x, -5, 5, color='red', linestyle='--')
p += plot(0.01,x, -5, 5, color='red', linestyle='--')
p.axes_labels(['x','13-b)'])
show(p)
# c)
p = plot( sin(pi*x) ,x, -1,1)
p += plot(1.01,x, -1, 1, color='red', linestyle='-')
p += plot(-1.0,x, -1, 1, color='red', linestyle='-')
p.axes_labels(['x','13-c)'])
show(p)
```

Problema 14

```
# 14            (Sage)
# a)
p = plot( (sqrt(1+x)-sqrt(1-x))/x^2,x,0.01,1)
p.axes_labels(['x','14-a)'])
show(p)
# b)
p = plot( (x^3-8)/(x^2-4),x, 2+10^-6,5)+plot(x+2,x,1,2)
p.axes_labels(['x','14-b)'])
```

```
show(p)
# b)
p = plot( cos( (x^2-1)/abs(x^2-1) ),x,-2,2)
p.axes_labels(['x','14-c)'])
show(p)
# b)
p = plot( exp(-1/(x-2*x^2) ),x,0,1/2)
p.axes_labels(['x','14-d)'])
show(p)
```

Problema 15

```
# 15            (Sage)
p1 = plot( 1+x,x,0,1) + plot( -1+x,x,-1,0)
p2 = plot( -1+x,x,0,1) + plot( 1+x,x,-1,0)
show(p1)
show(p2)
```

Problema 16

```
# 16               (Sage)
f = 1/(x^2*abs(x)+1)
p = plot( f ,x, -0.1,0.1)
p.axes_labels(['x','f'])
show(p)

g = x^2*sin(1/x)
p = plot( g ,x, -0.1,0.1)
p.axes_labels(['x','g'])
show(p)

h = x*sin(1/x)
p = plot( h ,x, -0.1,0.1)
p.axes_labels(['x','h'])
show(p)
```

Problema 17

```
# 17               (Sage)

def plot_tg(f, a, s):
    var('t')
    p = plot( f ,x, a-0.5,a+0.5, thickness=2)
    p += plot( diff(f,x)(a)*(t-a)+f(a) ,t, a-0.47,a+0.47, color='red')
    p.axes_labels(['x',s])
    show(p)


# a)
plot_tg( log(exp(1)+sin(x)), 0, '17-a)')

# b)
plot_tg( x^(x^2-x+1), 1, '17-b)')
```

```
# c)
plot_tg( (sin(x))^2-(cos(x))^2, pi/6, '17-c)')

# d)
plot_tg( (x+1)/(x^2+1), 2, '17-d)')
```

Problema 25

```
# 25              (Sage)
f = x*log(x)
p = plot( f ,x, 0.01,3.0, ymin = -0.5, ymax = 2)
p += circle((0,0), 0.03, color='blue', thickness=2)

p.axes_labels(['x','25)'])
show(p)
```

Problema 26

```
# 26              (Sage)
f = abs(x^2-4*x+3)
p = plot( f ,x, 0.0,4.0, thickness=2)
p.axes_labels(['x','26)'])
show(p)
```

Problema 28

```
# 28              (Sage)
f = abs(x)/(1+x)
p = plot( f ,x, -2.0,-1.2, thickness=2)
p += plot( f ,x, -0.8,1.0, thickness=2)
p += line([(-1,-6), (-1,4)], color='red', linestyle='--')
p.axes_labels(['x','28)'])
show(p)
```

Problema 30

```
# 30           (Sage)
p = plot( abs(x)/(x^2+1),x,-2.5,2.5)
p.axes_labels(['x','30)'])
show(p)
```

Problema 39

```
# 39           (Sage)
p = plot( 2/(4*x^2+1),x,-1,1) + plot( 2*abs(x),x,-1,1)
p += plot(2/(4*x^2+1),x, -1/2, 1/2, fill=2*abs(x), fillcolor='red',
        fillalpha=0.2, thickness=0)
show(p)
```

Problema 40

```
# 40           (Sage)
p = plot( x^2-2*x+7,x,0,2)
p += plot( -2*x+7,x,0,1)
p += plot( 2*x+3,x,1,2)
p += plot( x^2-2*x+7,x, 0, 1, fill=-2*x+7, fillcolor='red', fillalpha=0.2)
p += plot( x^2-2*x+7,x, 1, 2, fill= 2*x+3, fillcolor='red', fillalpha=0.2)
show(p)
```

Problema 41

```
# 41           (Sage)
p = plot( sqrt(3*x) ,x,0,54)
p += plot( -sqrt(3*x),x,0,54)
p += plot( x/2-12,x,0,54)
p += plot( sqrt(3*x),x, 0, 12, fill=-sqrt(3*x), fillcolor='red', fillalpha=0.2)
p += plot( sqrt(3*x),x, 12, 48, fill= x/2-12, fillcolor='red', fillalpha=0.2)

show(p)
```

Problema 42

```
# 42           (Sage)
S = sphere(size=0.99, mesh=True, color='white', opacity=0.8)

alpha = var('alpha')
S += parametric_plot3d( (cos(alpha), 0, sin(alpha)), (alpha,0,pi), thickness=8)
#show(S, mesh=True)
show(S)

from sage.plot.plot3d.shapes import Cone
C = Cone(1, 1, color='gray', opacity=0.4).translate(0.0,0.0,-1.0).rotateY(pi/2)
C += parametric_plot3d( ( alpha, 0, alpha), (alpha, 0, 1), thickness=8)
show(C)
```

Problema 43

```
# 43           (Sage)
p = plot( x^2/2,x,-3,3)
p += plot( sqrt(-2*x),x,-3,0)
p += plot( -sqrt(-2*x),x,-3,0)
p += plot( sqrt(-2*x),x, -2, 0, fill=x^2/2, fillcolor='red', fillalpha=0.2)

show(p)
```

Problema 44

```
# 44              (Sage)
p = plot( x/(1 + x^2),x,-1.5,1.5) + plot(0.5*abs(x),x, -1.5, 1.5)
p += plot(0.5*abs(x),x, 0, 1, fill=x/(1 + x^2), fillcolor='red',
      fillalpha=0.2, thickness=0)
show(p)
```

10.4. Un examen resuelto

Los cinco ejercicios siguientes corresponden al examen final de Cálculo I del primer curso de grado de Ingeniería Informática, que tuvo lugar el 19 de enero de 2011.

Enunciado

---

1) Consideramos la sucesión a_n definida por

$$a_{n+1} = 2a_n^2 - 1, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

a) Demostrar que $-1 \leq a_n \leq 1$ para todo número natural n.
b) ¿Es a_n monótona?

---

2) Calcular

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx.$$

---

3) Calcular los límites siguientes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(\cos x)}{\operatorname{sen} x}$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x(4x+3)} - 2x)$.

---

4) Esbozar la gráfica de la función $f(x) = x\log(x)$. Indicando, si los hubiera, extremos locales, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento e intervalos de concavidad y convexidad.

---

5) Hallar qué valores reales debe tomar el parámetro α para que la siguiente serie converja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\alpha n}+1}{2^{\alpha n}+2^{-\alpha n}}.$$

Soluciones

---

1) a) Lo que se pide probar es $|a_n| \le 1$. Procedemos por inducción. Claramente $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \le 1$. Ahora suponemos que se cumple $|a_n| \le 1$. De aquí, $0 \le a_n^2 \le 1$, por tanto $0 \le 2a_n^2 \le 2$ y finalmente $-1 \le 2a_n^2 - 1 \le 1$ que equivale a $|a_{n+1}| \le 1$, es decir, hemos obtenido la propiedad cambiando n por $n+1$.

b) Sustituyendo tenemos $a_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$, y $a_4 = 2 \cdot \frac{49}{81} - 1 = \frac{17}{81}$. Entonces $a_1 > a_2$ pero $a_3 < a_4$ (basta mirar el signo). Por tanto la sucesión no es monótona.

---

2) La primera integral es inmediata:

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x\,dx = \log|x^2-1|\Big|_2^3 = \log 8 - \log 3 = \log\frac{8}{3}.$$

La segunda es suma de dos integrales inmediatas después de usar $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx &= \int_0^{\pi/2} \big(\operatorname{sen} x + (\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)\big)\,dx \\ &= \Big(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

---

3) Llamemos a los límites L_1, L_2, L_3 y L_4, respectivamente.

a) Usando que la exponencial es la inversa del logaritmo y que $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = 1$ (esto se puede hacer por L'Hôpital (0/0) o usando que $\frac{\operatorname{sen} t}{t} \to 1$ cuando $t \to 0$), se tiene

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} e^{(\log x)\operatorname{sen}(1/x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}(\log x)\operatorname{sen}(1/x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

En el último paso se ha empleado la regla de L'Hôpital.

b) La manera más rápida consiste en escribir $t = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ y utilizar el límite del seno antes mencionado. También se puede aplicar directamente la regla de L'Hôpital (0/0):

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x}{\cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) Es un límite de tipo 0/0 sin la menor complicación:

$$L_3 = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-\operatorname{sen} x)/\cos x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

d) Como es habitual para eliminar la indeterminación $\infty - \infty$ con raíces, multiplicamos por el conjugado:

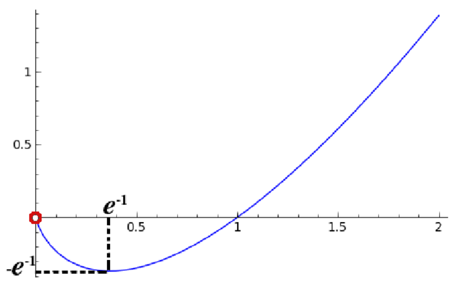
$$L_4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x(4x+3)} - 2x)(\sqrt{x(4x+3)} + 2x)}{\sqrt{x(4x+3)} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 + 3x - 4x^2}{\sqrt{4x^2+3x} + 2x}.$$

Ahora en esta expresión dividimos numerador y denominador entre x, "el mayor exponente":

$$L_4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{4+3/x}+2} = \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4}.$$

---

4) El dominio de esta función es $(0,\infty)$ porque el logaritmo sólo existe para números positivos.



El único corte con los ejes es $x = 1$ (el valor para el que se anula el logaritmo), aunque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, por L'Hôpital para $(\log x)/x^{-1}$. Éste límite y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ prueban que no hay asíntotas.

Calculamos la derivada $f'(x) = \log x + 1$. La solución de $\log x + 1 = 0$ es $x_0 = e^{-1}$. Para $0 < x < x_0$ se tiene $\log x < -1$ y para $x > x_0$, $\log x > -1$, entonces la función decrece en $(0, x_0)$ y crece en (x_0,∞) alcanzando por tanto un mínimo (global) en $x = x_0$ que es $f(x_0) = -e^{-1}$.

Derivando una vez más $f''(x) = 1/x$ que es positiva en $(0,\infty)$. Por consiguiente la función es convexa en todo su dominio y no hay puntos de inflexión.

---

5) Escribamos a_n para la expresión en el sumatorio. Lo más fácil es percatarse de que

$$a_n = \frac{2^{2\alpha n}+1}{2^{\alpha n}+2^{-\alpha n}} = \frac{2^{2\alpha n}+1}{2^{-\alpha n}\big(2^{2\alpha n}+1\big)} = 2^{\alpha n}.$$

Por el criterio de la raíz, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\alpha n}$ converge para $\alpha < 0$ y diverge para $\alpha > 0$. Además para $\alpha = 0$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ que claramente diverge ($\lim a_n \neq 0$).

Incluso sin percatarse de esta simplificación, lo más natural es aplicar el criterio de comparación con $b_n = 2^{\alpha n}$ o usar previamente que $\lim a_n = 0$ no se cumple para $\alpha \geq 0$.
