Resumen del tema 8

Cálculo de áreas. Para hallar el área limitada por las gráficas de dos funciones hay que integrar la función cuya gráfica esta por encima menos la función cuya gráfica esta por debajo.

Ejemplo: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de la parábola $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y de la recta $g(x) = x + 1$.

Las gráficas se cortan cuando $f(x) = g(x)$, que lleva a $x = 1, 2$. Para $x \in [1, 2]$ la gráfica de g está por encima (basta dar un valor o hacer un esbozo de las graficas). Entonces el área es $\int_1^2 \big(x + 1 - (x^2 - 2x + 3)\big)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x\big|_1^2 = \frac{1}{6}$.

Ejemplo: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ y de $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$.

Como $f(x) - g(x) = x^3 - x$, las intersecciones ocurren para $x = -1, 0, 1$. Claramente $x^3 - x$ es positivo para $x \in (-1, 0)$ y negativo para $x \in (0, 1)$. Por tanto el área es $\int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx + \int_0^1 (-x^3 + x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Criterio de la integral. Considerando sumas superiores e inferiores formadas por rectángulos de base 1, no es difícil demostrar que si f es una función decreciente y positiva en $[k, \infty)$ entonces $\sum_{n=k+1}^N f(n) \le \int_k^N f(x)\, dx \le \sum_{n=k}^{N-1} f(n)$. En particular, bajo estas hipótesis sobre la función f, la serie $\sum_{n=k}^\infty f(n)$ converge si y sólo si la integral $\int_k^\infty f$ converge. A este criterio se le llama *criterio de la integral*. En la práctica su utilidad es limitada pues no extiende lo que ya sabríamos hacer con otros criterios.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^\infty n^{-1}$ no converge porque la integral $\int_1^\infty x^{-1}\, dx$ no converge. En general, $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ no converge para $0 < \alpha \le 1$ y converge para $\alpha > 1$ porque éste es el carácter de la integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}\, dx$.

Este resultado ya era conocido partiendo del criterio de condensación.

Áreas y volúmenes de cuerpos de revolución. Al girar alrededor del eje X la gráfica de una función $f = f(x)$ para $x \in [a, b]$, se obtiene una superficie (llamada *de revolución*). El volumen que limita viene dado por $\pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx$.

El área de una superficie de revolución es $2\pi \int_a^b f\sqrt{1 + (f')^2}$ pero en la práctica esta fórmula rara vez lleva a integrales que se puedan calcular explícitamente.

Ejemplo: Calcular el volumen V de la esfera de radio R.

La superficie esférica se obtiene girando la semicircunferencia dada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en $x \in [-R, R]$. Entonces $V = \pi \int_{-R}^R \big(R^2 - x^2\big)\, dx = \pi\big(R^2 x - \frac{x^3}{3}\big)\big|_{-R}^R = \frac{4\pi}{3} R^3$.

Ejemplo: Calcular el área lateral del cono obtenido al girar la gráfica $f(x) = x$ en $[0, 1]$. Según la fórmula el área es $2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 1^2}\, dx = \pi\sqrt{2}$.