Resumen del tema 7

La integral y el teorema fundamental del cálculo. La integral de una función acotada en $[a, b]$ es intuitivamente el área limitada por su gráfica y el eje X entendiendo que el área es negativa si está por debajo del eje. Ésta no es una definición matemáticamente válida porque supone el concepto de área. Las *sumas superiores* son las sumas de la áreas de rectángulos por encima de la gráfica con base en el eje X. Análogamente las *sumas inferiores* corresponden a rectángulos por debajo de la gráfica. Se dice que una función f acotada en $[a, b]$ es *integrable* si el ínfimo de las sumas superiores coincide con el supremos de las sumas inferiores. A esta cantidad se la llama *integral* (o *integral definida*) de f en $[a, b]$ y se denota con $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\, dx$.

Se puede probar que todas las funciones continuas son integrables. Algunas de las propiedades de la integral son

$$1)\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g, \quad 2)\ f \le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g, \quad 3)\ a < c < b \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

El teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow indican que integrar es en cierto modo lo contrario que derivar.

Teorema (fundamental del cálculo). Si f es continua en $[a, b]$ entonces $F(x) = \int_a^x f$ verifica $F'(c) = f(c)$ para $a < c < b$.

Corolario (Regla de Barrow). Si f es continua en $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces $\int_a^b f = g(b) - g(a)$.

<u>Ejemplo</u>: La función $g(x) = x^3/3$ cumple $g'(x) = x^2$, entonces $\int_a^b x^2\, dx = (b^3 - a^3)/3$.

Dada una función f, las funciones que cumplen $g' = f$ se llaman *primitivas* (o *antiderivadas*) de f. Todas ellas difieren en una constante. Normalmente se emplea el símbolo de la *integral indefinida* $\int f$ para indicar todas las primitivas. Según la tabla de derivadas

$$\int 0\, dx = K, \qquad \int x^{-1}\, dx = \log|x| + K, \qquad \int x^\alpha\, dx = \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \quad (\alpha \ne -1),$$

$$\int e^x\, dx = e^x + K, \qquad \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + K, \qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + K,$$

donde K denota una constante arbitraria.

Integración por partes. Por la fórmula para la derivada de un producto $uv' = (uv)' - vu'$. Integrando se obtiene $\int uv' = uv - \int vu'$. Habitualmente se suele despejar formalmente en la notación de Leibniz $u' = du/dx$ y $v' = dv/dx$ para escribir la fórmula anterior como

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Ests técnica es útil cuando se tiene un producto de una función que se simplifica al derivar por otra que no se complica al integrar.

Ejemplo: Para calcular $\int_0^1 x^2e^x\ dx$ se debe tomar $u = x^2$, $dv = e^x\ dx$ que corresponde a $du = 2x\ dx$ y $v = e^x$. La función u al derivar dos veces se reduce a una constante y por tanto la fórmula de integración por partes aplicada dos veces permite obtener la integral indefinida.

$$\int x^2e^x\ dx = x^2e^x - 2\int xe^x\ dx = x^2e^x - 2\big(xe^x - \int e^x\ dx\big) = (x^2 - 2x + 2)e^x + K.$$

Por tanto $\int_0^1 x^2e^x\ dx = (x^2 - 2x + 2)e^x\big|_0^1 = e - 2$.

En productos de exponenciales y senos o cosenos la integración por partes establece una ecuación para la integral a partir de la cual se puede despejar.

Integración por cambio de variable. La fórmula $\int h'\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = h\big(g(x)\big) + K$ se sigue inmediatamente de la regla de la cadena. Tomando en lugar de h una primitiva suya, f, se tiene que $\int f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx$ es igual que $\int f(t)\ dt$ sustituyendo $t = g(x)$ en el resultado. Aquí también se emplea a menudo formalmente la notación de Leibniz diciendo que el cambio de variable $t = g(x)$ implica $dt = g'(x)\ dx$ (o se despeja dx en función de dt) y de aquí $\int f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = \int f(t)\ dt$. No hay que olvidar deshacer el cambio en el resultado para tener una función de x. Para integrales definidas esta integración por cambio de variable se reduce a la fórmula

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\ g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt.$$

Ejemplo: Calcular $I = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\ dx$. Si uno quiere aplicar directamente la fórmula anterior con $g(x) = \sqrt{x}$ se podría escribir $e^{\sqrt{x}} = f(\sqrt{x})(2\sqrt{x})^{-1}$ con $f(x) = 2xe^x$. Entonces $I = \int_0^2 2xe^x\ dx$ que integrando por partes es $2(x-1)e^x\big|_0^2 = 2e^2+2$. Sin embargo es más natural razonar diciendo que aplicamos el cambio $x = t^2$ para quitar la raíz cuadrada del exponente, de aquí $dx = 2t\ dt$. Por consiguiente la integral indefinida es

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx = \int 2te^t\ dt = 2(t-1)e^t + K = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + K.$$

Sustituyendo los límites se obtiene de nuevo $I = 2e^2 + 2$.

Integración de funciones racionales. Se dice que f es una función racional si es cociente de polinomios, $f(x) = P(x)/Q(x)$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q lo primero que se hace es hallar el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ al dividir estos polinomios. La relación $P = QC + R$ conduce a

$$\int \frac{P}{Q} = \int C + \int \frac{R}{Q}.$$

Entonces basta considerar el caso en que el numerador tiene grado menor que el denominador. También se puede suponer que Q es mónico (coeficiente principal uno) sacando factor común.

Por ejemplo

$$\int \frac{8x^3-2x+3}{4x^2-1}\,dx = \int (2x+\frac{3}{4x^2-1})\,dx = x^2+\frac{1}{4}\int \frac{3}{x^2-1/4}\,dx.$$

Si Q tiene todas sus raíces reales se factoriza como $(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}$ y P/Q (con Q de grado mayor) admite una descomposición en *fracciones simples*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Big(\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\Big)+\cdots+\Big(\frac{A_{n1}}{x-\alpha_n}+\cdots+\frac{A_{nk_n}}{(x-\alpha_n)^{k_n}}\Big).$$

Los A_{ij} se calculan operando e igualando los coeficientes de los numeradores de ambos miembros. La sustitución $x=\alpha_j$ permiten encontrar los coeficientes si no hay raíces múltiples.

En el caso anterior

$$\frac{3}{x^2-1/4} = \frac{A}{x-1/2}+\frac{B}{x+1/2} \;\Rightarrow\; 3 = A(x+1/2)+B(x-1/2).$$

Con $x=1/2$ se obtiene $A=3$ y con $x=-1/2$, $B=-3$. En definitiva

$$\int \frac{8x^3-2x+3}{4x^2-1}\,dx = x^2+\frac{1}{4}\int (\frac{3}{x-1/2}-\frac{3}{x+1/2})\,dx = x^2+\frac{3}{4}\log|x-\frac{1}{2}|-\frac{3}{4}\log|x+\frac{1}{2}|+K.$$

El método es general si se permiten números complejos. Pero esto no es lo habitual y entonces en Q es posible que aparezcan factores x^2+ax+b con raíces complejas. Si estos factores no están repetidos basta añadir sumandos $(Mx+N)/(x^2+ax+b)$ a la descomposición en fracciones simples. Completando cuadrados y cambiando la variables todo se reduce al caso $a=0$, $b=1$ cuya integral es $\frac{M}{2}\log(x^2+1)+N\operatorname{arc\,tg} x+K$.

Por ejemplo

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{\big((x+1)/2\big)^2+4}\,dx \xrightarrow{(x+1)/2=t} \frac{1}{2}\int \frac{4t-1}{t^2+1}\,dt$$

que integrando es $\log(t^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t+K$ donde hay que sustituir $t=(x+1)/2$.

Algunas integrales trigonométricas. Las integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen} x,\cos x)\,dx$ donde f es una función racional se pueden reducir a una integral de una función racional con los cambios $t=\cos x$, $t=\operatorname{sen} x$ o $t=\operatorname{tg} x$ dependiendo de si las simetrías de f son $f(x,y)=-f(-x,y)$, $f(x,y)=-f(x,-y)$ o $f(x,y)=f(-x,-y)$, respectivamente. Un último recurso si no hay simetrías es el cambio $t=\operatorname{tg}(x/2)$ que implica $\operatorname{sen} x=2t/(1+t^2)$ y $\cos x=(1-t^2)/(1+t^2)$.

Este tipo de integrales pueden dar lugar a cálculos bastante largos.

En este curso consideraremos sobre todo el caso en que f es un polinomio que conduce a las integrales $\int \operatorname{sen}^m x\ \cos^n x\ dx$ que pueden tratarse directamente. Si n es impar entonces $\cos^{n-1} x=(1-\operatorname{sen}^2 x)^{(n-1)/2}$ y desarrollando la potencia se obtienen integrales del tipo

$\int \operatorname{sen}^k x \cos x\, dx = (k+1)^{-1} \operatorname{sen}^{k+1} x + K$. Si m es impar, se procede análogamente invirtiendo el papel desempeñado por senos y cosenos. Si m y n son pares se aplican las fórmulas del ángulo mitad

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Ejemplo: Calcular $\int \cos^3 x\, dx$ y $\int \cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx = \int (\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x)\, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + K.$$

En la segunda el procedimiento anterior da lugar a

$$\int \Big(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\Big)\, dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\, dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\Big) + K.$$

Las integrales trigonométricas permiten calcular algunas integrales con radicales cuadráticos tras cambios de variable adecuados.

Ejemplo: Para calcular $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$ el cambio $x = 2\operatorname{sen} t$ y la relación $1 - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$ eliminan la raíz a costa de introducir el factor $dx = 2\cos t\, dt$. Concretamente

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\operatorname{sen}^2 t}\ (2\cos t)\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\Big)\, dt = 4\Big(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \pi.$$

Esto es coherente con que I representa el área de un cuarto de circunferencia de radio 2.

Integrales como $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$ y $\int (x^2 \pm a^2)^{-1/2}\, dx$ también dan lugar a integrales trigonométricas tras el cambio $x = a \operatorname{tg} t$ o $x = a\cos^2 t$ pero los cálculos son un poco laboriosos y es mejor consultar su resultado en una tabla de integrales.

Integrales impropias. La definición de integral está limitada a funciones acotadas en intervalos acotados. Se puede escapar de estas limitaciones en muchas casos considerando límites en los extremos del intervalo. Se dice que estas integrales que exceden la definición original son *integrales impropias.*

Así $\int_0^\infty e^{-x/2}\, dx$ se define como $\lim_{X\to+\infty} \int_0^X e^{-x/2}\, dx$ que es $2 - 2\lim_{X\to+\infty} e^{-X/2} = 1$. La integral $\int_0^1 x^{-1/3}\, dx$, con $x^{-1/3}$ no acotada si $x \to 0$, se redefine como $\lim_{X\to 0} \int_X^1 x^{-1/3}\, dx = \frac{2}{3}$.

Si el límite que define una integral impropia existe, se dice que es convergente. Para decidir la convergencia de una integral impropia no es necesario calcularla. Basta compararla con integrales conocidas más sencillas.

Ejemplo: La integral $\int_1^\infty f$ con $f(x) = (x^3 - 3x - 5)/(x^4 + x^2 + 1)$ no converge porque $f(x) \ge 0.5/x$ para x suficientemente grande, ya que $\lim_{x\to\infty} x f(x) = 1$. La monotonía de la integral asegura $\int_1^X f \ge 0.5 \int_1^X x^{-1}\, dx = 0.5 \log X$ que tiende a infinito con X.