Resumen del tema 6

Cálculo de límites. La aplicación de las derivadas más conocida para el cálculo de límites es la *regla de L'Hôpital* que se puede enunciar en varias versiones. Definiendo $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se sintetizan en que si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ó $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ con $a \in \mathbb{R}^+$ y además $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Sólo es aplicable a indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ pero algunas otras se transforman en éstas.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el valor de $L = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.
Tomando logaritmos y aplicando la regla de L'Hôpital

$$\log L = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x \cos x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

donde se ha usado que $\cos x \to 1$ cuando $x \to 0$. Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital o dando este límite por conocido se sigue $\log L = -1/2$ y por tanto $L = e^{-1/2}$.

A menudo es conveniente utilizar aproximaciones de Taylor en lugar de la regla de L'Hôpital.
<u>Ejemplo</u>: Calcular $L = \lim_{x\to 0} (2\cos x - 2 + x^2)/x^4$.
Sabemos que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_{4,0}(x)$ con $R_{4,0}(x)/x^4 \to 0$ (porque $R_{4,0}(x)$ es una derivada multiplicada por x^5). Entonces

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\big) - 2 + x^2}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

Crecimiento y decrecimiento. Se dice que una función f es *creciente* en un intervalo I si para todo $x, y \in I$ con $x \ge y$ se tiene $f(x) \ge f(y)$. Bajo las mismas hipótesis se dice que es *decreciente* en I si $f(x) \le f(y)$.

Supongamos que f es derivable en un intervalo I. Por el teorema del valor medio $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$ y se deduce que f es creciente en I si y sólo si $f' \ge 0$ en I y que es decreciente en I si y sólo si $f' \le 0$ en I.

Una función f se dice que alcanza un *máximo local* (o *relativo*) en a si para cierto $\epsilon > 0$ se cumple que $f(a) \ge f(x)$ para todo $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Análogamente se dice que alcanza un *mínimo local* (o *relativo*) en a si con la misma notación $f(a) \le f(x)$. En cada caso, se dice que el máximo o el mínimo local es $f(a)$.

Para referirse simultáneamente a máximos y a mínimos se suele emplear la expresión *extremos*.

Una función derivable que alcanza un extremo local en a debe cumplir necesariamente $f'(a) = 0$. Si la función pasa de ser creciente a ser decreciente en a entonces se alcanza un máximo local y si pasa de ser decreciente a ser creciente, se alcanza un mínimo local.

La existencia de extremos locales no asegura que existan extremos globales (valores máximo y mínimo de la función).

Ejemplo: Hallar los extremos locales de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Al derivar e igualar a cero debemos resolver $6x^2 - 30x + 36 = 0$ cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 3$. En estos puntos se alcanzan posibles extremos locales. De $f'(x) = 6(x-2)(x-3)$ se obtiene $f'(x) \le 0$ en $I_1 = [2,3]$ y $f'(x) \ge 0$ en $I_2 = (-\infty, 2]$ y $I_3 = [3, \infty)$. Entonces la función es creciente en I_1 y en I_3 y decrecimente en I_2 y en $x = 2$ se alcanza un máximo local que es $f(2) = 29$ mientras que en $x = 3$ se alcanza un mínimo local que es $f(3) = 28$. Sin embargo no hay extremos globales porque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Cuando f'' es positiva en un intervalo entonces f' es creciente en dicho intervalo y la recta tangente tiene mayor pendiente. Geométricamente esto se traduce en que la gráfica de f está curvada hacia abajo (como un valle) y se dice que es *convexa*. Análogamente cuando f'' es negativa, la gráfica de f está curvada hacia arriba (como un bombín) y se dice que es *cóncava*. Si en un punto se cambia de cóncava a convexa o viceversa, se dice que es *punto de inflexión*.

Desafortunadamente no hay acuerdo en la terminología de cóncava y convexa y en algunos textos estos nombres están intercambiados.

Representación gráfica. Dada una función f el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ determinado por los puntos de la forma $\big(x, f(x)\big)$ es su *gráfica*. Antes de dibujar una gráfica hay que determinar los valores de x para los que $f(x)$ está definido (el *dominio* de la función). Otra información que suele ser relevante para dar un esbozo cualitativo de la gráfica es:

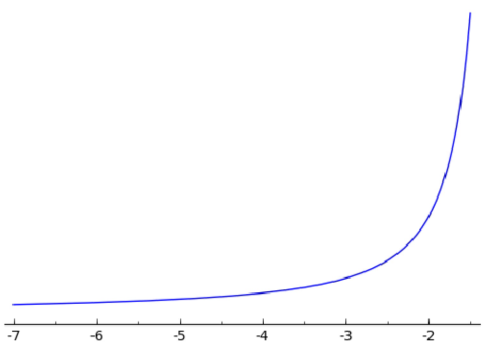
1. Simetrías $f(x) = f(-x)$ (simetría par) o $f(x) = -f(-x)$ (simetría impar).
2. Cortes con los ejes.
   Con el eje X: $(x_j, 0)$ donde $f(x_j) = 0$. Con el eje Y: $\big(0, f(0)\big)$.
3. Asíntotas.
   Horizontales: $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ (cuando el límite es finito). Verticales: $x = a_j$ con $\lim_{x\to a_j} f(x) = \infty$.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos locales.
5. Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

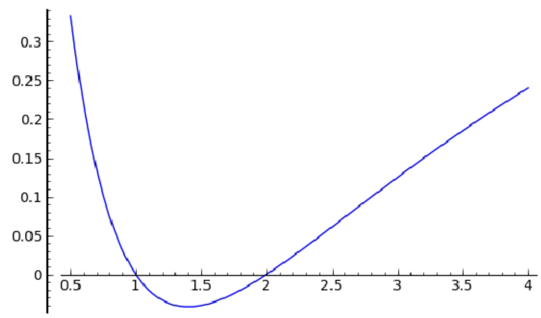
Ejemplo: Representar la gafica de $f(x) = (x^2 - 3x + 2)/(x+1)^2$.

La función está definida para todo $x \neq -1$. No tiene simetrías. Resolviendo la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ se llega a los cortes con el eje X $(2,0)$ y $(1,0)$, mientras que el corte con el eje

Y es $(0, 2)$. Hay una asíntota horizontal en $y = 1$ (porque $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$) y otra vertical en $x = -1$ (porque $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$).

La derivada es $f'(x) = (5x - 7)/(x + 1)^3$ por tanto la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $[7/5, +\infty)$, y es decreciente en $(-1, 7/5)$. Se alcanza un mínimo local en $x = 7/5$, que es $f(7/5) = -1/24$, y no hay más extremos locales. La derivada segunda es $f''(x) = (26 - 10x)/(x + 1)^4$ de donde f es cóncava en $[13/5, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, -1)$ y $(1, 13/5]$. En $x = 13/5$ se alcanza un punto de inflexión, $(13/5, 2/27)$.





Estos dibujos con ordenador muestran limitaciones para dar una idea global debido a que diferentes elementos de la gráfica viven a diferentes escalas que no se pueden representar al tiempo. En el segundo se ve el mínimo pero si usáramos la misma escala que en el primero sería invisible. La asíntota $y = 1$ no se ve por la derecha por este mismo problema con las escalas.

Método de Newton. Supongamos que $x = x_0$ es una aproximación de la solución de $f(x) = 0$. Hallemos la recta tangente en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ a la gráfica de f y digamos que interseca al eje X en $x = x_1$. Si x_1 también está cerca de la solución geométricamente parece claro que al iterar este procedimiento se obtendrán aproximaciones más precisas. Esta técnica para aproximar soluciones se llama *método de Newton* y en la práctica es muy poderosa.

La ecuación de la recta tangente en $\big(x_n, f(x_n)\big)$ es $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ y su intersección con $y = 0$ (el eje X) da lugar a la siguiente fórmula para el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ejemplo: La ecuación cúbica $x^3 - 7x + 7 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[1, 1.5]$ por el teorema de Bolzano. Eligiendo en el método de Newton el valor inicial $x_0 = 1.25$ se obtiene

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.25	0.203125
1	1.33783783784	0.0296107831718
2	1.35599761482	0.00132955513831
3	1.35689365533	$3.26686452823 \cdot 10^{-6}$