Resumen del tema 5

El teorema de la función inversa. En la práctica es difícil que exista una expresión explícita para la función inversa y ello hace que no sea fácil un tratamiento directo de las propiedades de las funciones inversas. Esperamos que una función derivable y biyectiva tenga una función inversa derivable, excluyendo algunos casos más o menos obvios. El teorema de la función inversa afirma que éste es el caso.

Teorema (de la función inversa). Sea f derivable en un intervalo abierto I y tal que f' no se anula en dicho intervalo, entonces $f : I \longrightarrow J$ es biyectiva (donde J es el intervalo imagen de I) y la función inversa $f^{-1} : J \longrightarrow I$ es derivable y cumple $\big(f^{-1}\big)'(x) = 1/f'\big(f^{-1}(x)\big)$ para todo $x \in J$.

Ejemplo: Comprobar que existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $\big(g(x)\big)^5 + g(x) + x = 0$ y hallar $g'(0)$.

Definiendo $f(x) = -x^5 - x$ se tiene $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y f' no se anula, por tanto existe $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y $g = f^{-1}$ verifica $f\big(g(x)\big) = x$, que equivale a la ecuación buscada. De $f(0) = 0$ se deduce $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1/f\big(g'(0)\big) = 1/f'(0) = -1$.

Teoremas del valor medio. El teorema del valor medio por antonomasia es el siguiente resultado:

Teorema (del valor medio de Lagrange). Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretando f como la función que da el espacio en función del tiempo, intuitivamente lo que afirma es que si al viajar entre dos puntos la velocidad media es v entonces en algún punto intermedio se alcanza justamente la velocidad v.

Una variante de este resultado que se emplea al probar la regla de L'Hôpital es:

Teorema (del valor medio de Cauchy). Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

La fórmula se puede reescribir como un cociente de las fórmulas del teorema del valor medio de Lagrange para f y g en el mismo punto (aunque no se suele hacer así para no excluir los casos con derivadas nulas). La interpretación mecánica sería ahora que si el cociente de dos velocidades medias es r entonces en algún punto el cociente de las velocidades instantáneas es también r.

Estos dos teoremas son consecuencias de uno mucho más simple:

Teorema (de Rolle). Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$.

Geométricamente, lo que dice es que en una gráfica que une dos puntos de la misma altura siempre hay un punto donde la tangente es horizontal.

Los teoremas del valor medio de Lagrange y de Cauchy se deducen aplicando el teorema de Rolle a las funciones $F(x) = f(x)(b-a) - \big(f(b) - f(a)\big)(x-a)$ y $F(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(x) - f(a)\big)$, respectivamente.

El teorema de Rolle asegura que no se puede alcanzar un mismo valor dos veces si la derivada no se anula. Este hecho en combinación con el teorema de Bolzano permite localizar soluciones de ecuaciones.

Ejemplo: Hallar el número de soluciones de la ecuación $2x = 1 + \operatorname{sen} x$.

Considerando $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$ se tiene que f' no se anula y por tanto $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones (llamándolas a y b, contradirían el teorema de Rolle). Por otra parte $f(0) < 0 < f(1)$ implica gracias al teorema de Bolzano que hay una solución en $[0,1]$.

Polinomios y series de Taylor. Desde el punto de vista práctica y también para ciertas resultados teóricos es interesante aproximar funciones complicadas por otras más sencillas.

Si f tiene n derivadas en a se define su *polinomio de Taylor* de orden n en a como

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Los polinomios de Taylor dan aproximaciones polinómicas de funciones con derivadas sucesivas que son óptimas localmente en cierto sentido.

Teorema (de Taylor). Sea f una función tal que existe su derivada $n+1$-ésima en $[a,x]$ (o en $[x,a]$), entonces

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \qquad \text{con } R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algún $c \in (a,x)$ (ó $c \in (x,a)$).

A $R_{n,a}(x)$ se le llama término de error o *resto de Taylor*. En principio es imposible hallarlo directamente por la indeterminación que hay en c pero la fórmula permite hacer estimaciones.

Ejemplo: Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt{x}$ en 16 y estimar el error cometido al usarlo para aproximar $\sqrt{16.2}$.

Las derivadas de f son $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$ y $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. Entonces

$$T_{2,16}(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2 \qquad \text{y} \qquad R_{2,16}(x) = \frac{1}{16c^{5/2}}(x-16)^3.$$

Por tanto al aproximar $\sqrt{16.2}$ por $T_{2,16}(16.2)$ el error es menor que $0.2^3/16^{7/2} = 10^{-3}/2048$, que difiere en menos de $5 \cdot 10^{-9}$ del error real.

Para funciones que tienen un número de derivadas arbitrariamente grande, se puede considerar la serie
$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
obtenida al hacer tender n a ∞ en $T_{n,a}$. Tal serie se llama *serie de Taylor* (si no se indica lo contrario se suele tomar $a = 0$). Cuando el error tiende a cero esta serie converge a la función. Con este significado se tienen las expresiones

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}\\
&e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{si } |x| \le 1\\
&\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{si } x \in (-1,1].
\end{aligned}$$

Ejemplo: Comprobar para qué valores de x converge la serie de Taylor en cero de $\operatorname{sen} x$.

La serie de Taylor es en este caso $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}/(2n-1)!$. Quitando los signos esto es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n = |x|^{2n-1}/(2n-1)!$. Suponiendo $x \neq 0$ (para $x = 0$ la convergencia es trivial) se tiene $\lim a_{n+1}/a_n = \lim |x|/(2n+1) = 0$ que implica la convergencia por el criterio del cociente. Así pues, la serie de Tayor de $\operatorname{sen} x$ es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Las series de Taylor se pueden sumar, multiplicar y componer formalmente agrupando términos del mismo grado. Esto permite calcular algunos polinomios y series de Taylor sin necesidad del cálculo de derivadas de orden superior. Por ejemplo, como para $f(x) = e^x$ se tiene $T_{n,0}(x) = 1 + x/1! + \dots + x^n/n!$ entonces para $f(x) = x^k e^x$ se tendrá $T_{n,0}(x) = x^k + x^{k+1}/1! + \dots + x^{n+k}/n!$. También, como la serie de Taylor de $\operatorname{sen} x$ es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}/(2n-1)!$, la de $\operatorname{sen}(x^2)$ será $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{4n-2}/(2n-1)!$.