Resumen del tema 4

Definición de derivada y su interpretación física y geométrica. La recta secante a la gráfica de una función f que pasa por los puntos con $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$ tiene pendiente $\big(f(b) - f(a)\big)/(b - a)$ (incremento de y entre incremento de x). Por otro lado en Física la velocidad media en un intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por $\big(s(b) - s(a)\big)/(b - a)$ donde $s = s(t)$ es el espacio.

Si escribimos $b = a + h$ en el límite cuando $h \to 0$ la secante se transformará en tangente y la velocidad media en velocidad instantánea. Esto sugiere definir el objeto matemático:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si este límite existe se dice que la función f es *derivable* en a y que $f'(a)$ es su *derivada* en a.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ es $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ y la velocidad instantánea en $t = a$ de una partícula bajo la ley de movimiento $s = s(t)$ es $s'(a)$.

<u>Ejemplo</u>: Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$ y hallar la recta tangente a su gráfica en ese punto.

Por la definición de derivada:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6 + h) = 6.$$

Por tanto la recta tangente es $y = 6(x - 3) + 9$, esto es, $y = 6x - 9$.

Cuando la función f' que asigna a cada x la derivada de f en x se deriva de nuevo se obtiene la llamada *derivada segunda* que se denota con f''. También se definen análogamente derivadas de orden superior: terceras, cuartas, quintas... que se denotan con f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$... (a veces se usan números romanos para las de orden bajo).

La notación de Leibniz, empleada ampliamente en Física, representa la derivada mediante el símbolo $\dfrac{df}{dx}$ donde x es la variable de la función f, mientras que $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ indica una derivada n-ésima. La ventaja de la notación de Leibniz es que recuerda al límite que define la derivada y da intuición sobre algunas fórmulas pero, además de aparatosa, es un poco deficiente para distinguir la derivada como función y el resultado de sustituir esa función en un punto.

No todas las funciones son derivables. Si una función no es continua entonces tampoco puede ser derivable porque entonces el límite del numerador en la definición de derivada no daría cero. Por otra parte hay funciones que son continuas y no derivables.

<u>Ejemplo</u>: La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable ya que el límite que definiría $f'(0)$ es $\lim_{h\to 0} |h|/h$ que no existe porque los límites laterales no coinciden.

Derivación de operaciones y funciones elementales La derivada actúa sobre funciones elementales y se comporta bajo las operaciones elementales como se indica en las siguientes tablas. Por otro lado, la regla de la cadena permite derivar unas funciones sustituidas en otras.

$f(x)$		$f'(x)$
K	$\longrightarrow$	0
x^α	$\longrightarrow$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	$\longrightarrow$	e^x
$\log x$	$\longrightarrow$	$1/x$
$\operatorname{sen} x$	$\longrightarrow$	$\cos x$
$\cos x$	$\longrightarrow$	$-\operatorname{sen} x$

Suma:	$(f+g)' = f' + g'$
Resta:	$(f-g)' = f' - g'$
Multiplicación:	$(fg)' = f'g + fg'$
División:	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Regla de la cadena: $\quad (f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

Aplicando la regla de la cadena a $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ se tiene que la derivada de la función inversa f^{-1} en x viene dada por $1/f'\big(f^{-1}(x)\big)$

Ejemplo: Se define la función $g(x) = \operatorname{arcsen}\ x$ (en muchas calculadoras $\sin^{-1}$) como la función inversa de sen en ciertos rangos. Su derivada es entonces $g'(x) = 1/\cos(\operatorname{arcsen}\ x)$ porque cos es la derivada de sen. Utilizando la fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ esto se puede escribir también como $g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Ejemplo: La siguiente función es una composición de sen y de otra función dada por una suma y un cociente. Se deriva sen y después se multiplica por la derivada de lo de dentro.

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\cos x}{x}\right) \;\Rightarrow\; f'(x) = \cos\left(x + \frac{\cos x}{x}\right)\cdot\left(1 + \frac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}\right)$$

Ejemplo: La función $f(x) = 2^x$ se puede escribir como $f(x) = e^{x\log 2}$ (porque $2 = e^{\log 2}$ al ser exponencial y logaritmo funciones inversas una de otra). Hay que derivar la exponencial y multiplicar por la derivada de $x\log 2$ que es $\log 2$ porque $\log 2 = 0{,}6931\dots$ es una constante. El resultado es entonces $f'(x) = e^{x\log 2}\log 2$.

Ejemplo: Procediendo como antes, la función $f(x) = x^x$ es $f(x) = e^{x\log x}$ y se tiene la composición de una exponencial con un producto que contiene un logaritmo. Entonces $f'(x) = e^{x\log x}(\log x + 1)$.

Ejemplo: La siguiente función es un cociente de un producto y una suma. En la suma hay una composición de sen y un cuadrado.

$$f(x) = \frac{x\log x}{e^x + \operatorname{sen}^2 x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{(\log x + 1)\big(e^x + \operatorname{sen}^2 x\big) - (x\log x)\big(e^x + 2\operatorname{sen} x\cos x\big)}{\big(e^x + \operatorname{sen}^2 x\big)^2}.$$