Resumen del tema 3

Repaso de funciones. Una *función* real f es una manera de asignar a cada número x de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ otro número real $f(x) \in \mathbb{R}$. Normalmente se escribe $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o $f : A \longrightarrow B$ si se quiere especificar donde están los resultados.

Al conjunto A se le llama *dominio* de f y al conjunto $\text{Im}(f) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$ se le llama *imagen* de f.

Ejemplo: La función $f(x) = 21 + |x-1|$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple $\text{Im}(f) = [21, +\infty)$.

Se dice que una función $f : A \longrightarrow B$ es:

- *inyectiva* si $f(x) = f(y)$ únicamente cuando $x = y$.
- *sobreyectiva* (o *suprayectiva*) si $\text{Im}(f) = B$.
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

En general no se puede decidir de qué tipo es una función sin especificar dónde está definida. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva cuando se considera como función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ porque $f(1) = f(-1)$ y $-1 \notin \text{Im}(f)$. Sin embargo es biyectiva considerada como función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Componer dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ consiste en sustituir la primera en la segunda. Es decir, la *composición* de g y f es $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si y sólo si existe una función $f^{-1} : B \longrightarrow A$, llamada *función inversa* de f, tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para $x \in A$ y $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para $x \in B$.

En la práctica la fórmula para f^{-1} se obtiene despejando la y en $x = f(y)$.

Ejemplo: Sabiendo que la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow (1, +\infty)$ dada por $f(x) = (x+1)/x$ es biyectiva, hallar su función inversa.

Despejando en $(y+1)/y = x$ se tiene $1 + 1/y = x$ y de aquí $y = 1/(x-1)$ por tanto $f^{-1}(x) = 1/(x-1)$.

Límites. Para una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede definir $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ exactamente igual que para sucesiones, es decir, el límite es l si por pequeño que sea $\epsilon > 0$ para x mayor que cierto valor se cumple $|f(x) - l| < \epsilon$. Simétricamente se define $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ donde ahora se exige que x sea negativo. Cuando no hay duda en el signo se escribe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

De la misma forma se define $\lim_{x\to a} f(x)$ como el valor al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a y es distinto de él. En términos matemáticos, $l = \lim_{x\to a} f(x)$ cuando para todo $\epsilon > 0$ cualquier $x \neq a$ suficientemente cercano a a cumple $|f(x) - l| < \epsilon$.

Finalmente, se consideran también los *límites laterales* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ que consiste en restringirse en la definición de límite a $x < a$ y a $x > a$, respectivamente.

El límite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si los limites laterales existen y coinciden.

Ejemplo: Las funciones $f(x) = x/|x|$ y $g(x) = 1/\big(1+e^{1/x}\big)$, definidas fuera de $x = 0$, verifican $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Por tanto no existen $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$.

Como en el caso de los límites de sucesiones, los límites de funciones respetan las operaciones elementales (excluyendo la división por cero). Todo lo dicho con respecto a las indeterminaciones se aplica aquí.

Dos límites del tipo $0/0$ que permiten calcular límites más complicados son:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Nótese que el segundo es el límite del número e tomando logaritmos tras el cambio $n \leftrightarrow 1/x$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^2+1}\big)}{x+2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^2+1}\big)}{\frac{x}{x^2+1}} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x+2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x+2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+2x^2)(x^2+1)} = 1.$$

Continuidad. Se dice que una función f es *continua* en a si verifica

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

En particular esto requiere que la función esté definida en el punto y que el límite exista. Por las propiedades de los límites las operaciones elementales (excluyendo la división por cero) respetan la continuidad.

La idea intuitiva es que la gráfica de f no esté “rota” en a. Cuando no se especifica el punto, al decir que una función es continua se sobreentiende que lo es en todos los puntos de su dominio.

Las funciones elementales, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log(1+x)$, etc. son continuas. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$ entonces $g\circ f$ es continua en a.

Ejemplo: Estudiar si las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \big(1+e^{1/x}\big)^{-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad h(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

son continuas.

La primera, fuera de cero es una combinación de funciones y operaciones elementales y por tanto continua. En cero ya habíamos visto que los límites laterales no coinciden, por consiguiente no es continua. De la misma forma, en g sólo examinamos $x = 0$. Por la izquierda $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$, por una variante del teorema del sandwich, ya que $|g(x)| \leq |x|$ para $x < 0$.

Por la derecha $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$, entonces existe $\lim_{x\to 0} g(x)$ y coincide con $g(0) = 0$, por tanto g es continua. Finalmente, para h en $x = 0$ la función pasa de ser $-x$ (a la izquierda) a x (a la derecha) pero como sus límites coinciden y $h(0) = 0$, no hay problema. En $x = 2$ el límite existe y es 2 pero es distinto de $h(2) = 4$ y se tiene que h no es continua.

Aparte de las propiedades generales ya indicadas hay tres teoremas que se aplican a cualquier función continua definida en un intervalo cerrado $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

T1 (de Bolzano o de los valores intermedios). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

T2 (de acotación). La función f está acotada, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \le M$.

T3 (de Weierstrass). La función f alcanza un máximo y un mínimo, es decir, existen x_m y x_M en $[a, b]$ tales que $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ para todo $x \in [a, b]$.

Nótese que los dos últimos resultados afirman que $\mathrm{Im}(f)$ es un conjunto acotado cuyo supremo e ínfimo pertenecen al conjunto.

A pesar de que estos teoremas tienen interés primordialmente teórico, el primero se relaciona con un método iterativo para buscar soluciones de ecuaciones. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo entonces o bien hay un cambio de signo en $f(a)$, $f\big(\frac{a+b}{2}\big)$ o bien lo hay en $f\big(\frac{a+b}{2}\big)$, $f(b)$. Por tanto, según el teorema, podemos buscar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en alguno de estos dos intervalos, que son la mitad de pequeños. Iterando el procedimiento se llega a intervalos arbitrariamente pequeños que dan lugar a una aproximación de la solución tan precisa como deseemos. Este esquema se denomina *método de la bisección*.

Ejemplo: Utilizar el método de la bisección para calcular con dos cifras decimales correctas la solución de $\operatorname{sen} x = e^{-x}$ en $[0, 1]$.

Los cálculos correspondientes a llevar a cabo 10 iteraciones para $f(x) = \operatorname{sen} x - e^{-x}$ son:

$[a, b]$	$\xrightarrow{f}$	$[f(a), f(b)]$			
[0.0, 1.0]	$\longrightarrow$	[−1.00000, 0.47359]	[0.5625, 0.59375]	$\longrightarrow$	[−0.03648, 0.00722]
[0.5, 1.0]	$\longrightarrow$	[−0.12711, 0.47359]	[0.578125, 0.59375]	$\longrightarrow$	[−0.01449, 0.00722]
[0.5, 0.75]	$\longrightarrow$	[−0.12711, 0.20927]	[0.5859375, 0.59375]	$\longrightarrow$	[−0.00360, 0.00722]
[0.5, 0.625]	$\longrightarrow$	[−0.12711, 0.04984]	[0.5859375, 0.58984375]	$\longrightarrow$	[−0.00360, 0.00182]
[0.5625, 0.625]	$\longrightarrow$	[−0.03648, 0.04984]	[0.587890625, 0.58984375]	$\longrightarrow$	[−0.00089, 0.00182]

Por tanto la solución es 0.58... y de hecho pertenece al intervalo [0.587890625, 0.58984375].