Resumen del tema 2

Tipos de sucesiones. Intuitivamente una *sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una lista (conjunto ordenado) infinita de números reales a_1, a_2, a_3, a_4, ... Más rigurosamente una sucesión es una forma de asignar a cada $n \in \mathbb{N}$ un número real a_n, el *término general* de la sucesión.

No siempre el término general tiene una fórmula explícita. Por ejemplo, $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} - 1$ define una sucesión por recurrencia (un elemento de la sucesión en términos de los anteriores).

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

- *creciente* si $a_{n+1} \ge a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- *decreciente* si $a_{n+1} \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- *monótona* si es creciente o decreciente.
- *acotada* (inferior o superiormente) si el conjunto formado por los a_n lo está.

Ejemplo: Consideremos las sucesiones cuyos términos generales son $a_n = (n+1)/n$ y $b_n = 20n - n^2$. La primera es decreciente ($a_n = 1 + 1/n$), en particular monótona. Está acotada superiormente por $a_1 = 2$ e inferiormente por 1. La segunda no es monótona porque por ejemplo $a_1 = 19 < a_2 = 36$ y $a_{18} = 36 > a_{19} = 19$.

El concepto de límite. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, y se escribe $\lim a_n = l$ ó $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ si para cualquier $\epsilon > 0$, por pequeño que sea, a partir de cierto n se cumple $|a_n - l| < \epsilon$.

Intuitivamente el límite es el valor al que se acerca a_n según crece n. No todas las sucesiones tienen límite. A las que sí lo tienen se les llama *convergentes* y a las que no lo tienen *divergentes* aunque unos pocos autores reservan este nombre para las sucesiones tales que a partir de cierto n, $|a_n|$ es mayor que cualquier cantidad prefijada de antemano. Este último hecho se suele denotar con $\lim a_n = \infty$ a veces especificando el signo, pero eso no quiere decir que exista el límite (∞ no es un número real), es sólo una notación para indicar una forma especial de la no existencia del límite.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = (n+1)/n$ es convergente. Podríamos conseguir $|(n+1)/n - 1| < 10^{-3}$ tomando $n > 1000$ y en general $|(n+1)/n - 1| < \epsilon$ tomando $n > \epsilon^{-1}$.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = 3 - n^2$ no es convergente porque $|a_n|$ crece indefinidamente, es decir $\lim a_n = \infty$.

Ejemplo: La sucesión definida por $a_n = 2 + (-1)^n$ tiene como elementos 1, 3, 1, 3, 1, 3,... y por tanto no es convergente (no está siempre cerca a partir de cierto n ni de 1 ni de 3, va oscilando). Esta sucesión no es monótona ni convergente pero sí acotada.

El cálculo de límites. La base teórica para el cálculo de límites es un resultado que asegura que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes entonces

$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n, \qquad \lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n, \qquad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

donde para la última propiedad se necesita $\lim b_n \neq 0$ (y $b_n \neq 0$ si se quiere que todos los a_n/b_n tengan sentido.

Hay una especie de "álgebra del infinito" fácil de intuir: $\infty \pm k = \infty$, $\infty \cdot k = \infty$ si $k \neq 0$ y $k/\infty = 0$. Aquí ∞, k y 0 significan sucesiones que tienden a estos valores. De la última se deduce también $k/0 = \infty$. Pero hay otras "operaciones" que no tienen un valor definido, dependen del ejemplo concreto. Se las suele llamar *indeterminaciones* y las ligadas a las operaciones elementales son

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Hay otras indeterminaciones ligadas a las potencias: 1^∞, ∞^0 y 0^0.

El procedimiento habitual para calcular límites es hacer manipulaciones algebraicas que eliminen las indeterminaciones.

Ejemplo:

$$\lim \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3n+1} = \lim \frac{\frac{\sqrt{n^2+3}}{n}+1}{3+\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Dividir entre n permite quitar los infinitos y la indeterminación ∞/∞ desparece.

$$\lim \big(\sqrt{n^2+1}-n\big) = \lim \frac{\big(\sqrt{n^2+1}-n\big)\big(\sqrt{n^2+1}+n\big)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

Se racionaliza y así la ausencia de raíces elimina la indeterminación $+\infty - \infty$.

Dos teoremas sobre límites. Dos de los resultados teóricos más relevantes sobre sucesiones convergentes son los siguientes:

Teorema del sandwich: Si a partir de cierto n se cumple $a_n \leq b_n \leq c_n$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes con $\lim a_n = \lim c_n = l$ entonces $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es convergente y su límite es l.

Idea: La sucesión b_n queda "emparedada" entre a_n y c_n si ellas se acercan a un mismo número, b_n también.

Teorema de Bolzano-Weierstrass (versión débil): Cualquier sucesión monótona y acotada es convergente.

Idea: Si una sucesión por ejemplo crece y no sobrepasa un cierto valor, entonces se debe acercar a algún número entre a_1 y ese valor.

Se puede probar (pero no es demasiado fácil) que $a_n = \big(1+1/n\big)^n$ define una sucesión monótona creciente y acotada por 3. El teorema anterior asegura que tiene límite. A éste se le llama *número e* y es aproximadamente 2,71828.

Ejemplo: Justificar que la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$,... es convergente y hallar su límite.

Por inducción se prueba que $a_n \le 2$ ($a_1 \le 2$ y, usando $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $a_n \le 2 \Rightarrow a_{n+1} \le 2$). Es monótona creciente porque

$$a_{n+1} \ge a_n \iff \sqrt{2+a_n} \ge a_n \iff 2+a_n \ge a_n^2 \iff 0 \ge (a_n+1)(a_n-2)$$

y sabemos que $0 \le a_n \le 2$, por tanto la última desigualdad se cumple. El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que existe $l = \lim a_n$. Por la definición de límite también $l = \lim a_{n+1}$ y tomando entonces límites en la relación $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ se sigue $l = \sqrt{2+l}$. Resolviendo la ecuación $l = 2$.

Series. Una *serie* no es más que una sucesión de la forma

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3+a_4, \dots$$

que se suele denotar con $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y a cuyos elementos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ se les llama *sumas parciales*. La convergencia o no de una serie es la de sus sumas parciales. Si una serie converge a l a veces se escribe $l = \sum_{n=1}^\infty a_n$.

Las sumas parciales no suelen admitir fórmulas explícitas, por ello hay varios criterios para decidir la convergencia a partir de los a_n.

Criterio del cociente: Supongamos que $a_n > 0$ y que existe $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

- Si $l < 1$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.
- Si $l > 1$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ no converge.

Obs.: Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ entonces tampoco converge. El caso $l = 1$ es indeterminado.

Criterio de la raíz: Supongamos que $a_n \ge 0$ y que existe $l = \lim a_n^{1/n}$

- Si $l < 1$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.
- Si $l > 1$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ no converge.

Obs.: Si $\lim a_n^{1/n} = \infty$ entonces tampoco converge. El caso $l = 1$ es indeterminado.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}$ converge usando cualquier de los dos criterios anteriores porque

$$\lim \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = \frac{1}{2} < 1 \qquad \text{y} \qquad \lim \big(2^{-n}\big)^{1/n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Criterio de condensación: Supongamos que $a_n \geq 0$ y que a partir de cierto n, la sucesión a_n es decreciente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

Ejemplo: Las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ donde $\alpha > 0$ por el criterio anterior llevan a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$ que por el criterio de la raíz o del cociente converge si y sólo si $\alpha > 1$.

Criterio de comparación: Supongamos que $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, entonces

- Si a partir de cierto n, $a_n \leq K b_n$ con K constante, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si a partir de cierto n, $b_n \leq K a_n$ con K constante, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Obs.: Nótese que $a_n \leq K b_n$ se cumple si $\exists \operatorname{lím} \frac{a_n}{b_n}$ y que $b_n \leq K a_n$ se cumple si $\exists \operatorname{lím} \frac{b_n}{a_n}$. En conclusión en el caso particular en que $\exists \operatorname{lím} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 5n + 20)^{-1}$ converge porque $\operatorname{lím} \frac{a_n}{b_n} = 1$ para $a_n = (n^2 - 5n + 20)^{-1}$ y $b_n = n^{-2}$ y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ converge.

Es fácil ver que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge necesariamente cumple $\operatorname{lím} a_n = 0$. Más allá de esta propiedad sencilla sólo veremos dos criterios para decir si una serie con términos positivos y negativos converge.

Convergencia absoluta: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Se dice que *converge absolutamente*.

Criterio de Leibniz: Si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ cumple $\operatorname{lím} a_n = 0$ y además a_n es monótona entonces la serie converge.

Cuando una serie converge con pero no absolutamente se dice que *converge condicionalmente*.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ converge por el criterio de Leibniz pero no converge absolutamente ya que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no converge. Entonces la serie inicial converge condicionalmente. Por otro lado $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2$ converge absolutamente.