Resumen del tema 1

El principio de inducción. Es un método para demostrar propiedades que involucran números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Probar una propiedad $\mathcal{P}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ requiere, según el principio de inducción, comprobar dos cosas:

1) $\mathcal{P}_1$ se cumple.
2) Suponiendo que $\mathcal{P}_n$ se cumple, entonces también se cumple $\mathcal{P}_{n+1}$.

Dos variantes comunes consisten en sustituir la primera propiedad por que $\mathcal{P}_{n_0}$ se cumpla para cierto n_0, entonces $\mathcal{P}_n$ quedará demostrado para $n \ge n_0$. También en la segunda propiedad se supone a veces que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\dots$ y $\mathcal{P}_n$ se cumplen (inducción completa).

<u>Ejemplo</u>: Demostrar que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Llamemos a esta propiedad $\mathcal{P}_n$. Claramente $\mathcal{P}_1$ se cumple porque $1 = 1(1+1)/2$. Suponiendo $\mathcal{P}_n$, es decir, la igualdad de partida, sumando en ambos miembros $n+1$ se obtiene

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= n(n+1)/2 + n + 1 \\ &= (n+1)(n/2+1) \\ &= (n+1)(n+2)/2 \end{aligned}$$

que es la propiedad para $n+1$.

Desigualdades y valor absoluto. Las desigualdades entre números reales se conservan si en ambos miembros se suma o se resta un mismo número real o si se multiplican o dividen por un número real positivo pero cambian de sentido si se multiplican o dividen por un número real negativo.

<u>Ejemplo</u>: Decidir para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple $(6x-9)/(x+2) \le 1$.

Quitar el denominador requiere distinguir dos casos:

a) $x + 2 > 0$ entonces $6x - 9 \le x + 2 \Leftrightarrow 5x \le 11 \Leftrightarrow x \le 11/5$.

b) $x + 2 < 0$ entonces $6x - 9 \ge x + 2 \Leftrightarrow 5x \ge 11 \Leftrightarrow x \ge 11/5$. Entonces o bien $x > -2$ y $x \le 11/5$, lo cual se cumple para $x \in (-2, 11/5]$, o bien $x < -2$ y $x \ge 11/5$ que claramente es imposible.

El *valor absoluto* es un número x, denotado con $|x|$, es x si $x \ge 0$ y $-x$ si $x < 0$. Es decir, es el número desprovisto de su signo.

<u>Ejemplo</u>: Estudiar para qué valores de x se verifica $|2x+5| > 1$.

Como antes distinguimos $2x + 5 \ge 0$ en cuyo caso $2x + 5 > 1$ o equivalentemente $x > -2$, y $2x + 5 < 0$ que análogamente lleva a $-3 > x$. Entonces $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$.

Cotas inferiores y superiores. Ínfimos y supremos. Dado un conjunto $\mathcal{A}$ de números reales se dice que M es una *cota superior* de $\mathcal{A}$ si $x \le M$ para todo $x \in \mathcal{A}$. De la misma forma se dice que m es una *cota inferior* si $m \le x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Si un conjunto admite una cota superior y una cota inferior se dice que está *acotado*. Si sólo admite una de ellas se dice que está *acotado superiormente* o *acotado inferiormente*, respectivamente.

Para un conjunto de números reales acotado superiormente siempre existe una cota superior mínima llamada *supremo*. De la misma forma, si está acotado inferiormente siempre existe una cota inferior máxima llamada *ínfimo*.

El ínfimo y el supremo de un conjunto $\mathcal{A}$ se suele denotar con $\inf \mathcal{A}$ y $\sup \mathcal{A}$, respectivamente. No siempre pertenecen al conjunto y cuando esto ocurre a veces se les llama mínimo y máximo.

Ejemplo: Sea el conjunto $\mathcal{A} = \big\{(-1)^n n + \frac{1}{n} + n + 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\big\}$. Estudiar si está acotado inferior y superiormente y en su caso hallar el ínfimo y el supremo.

Los elementos con n par son de la forma $n + \frac{1}{n} + n + 1 = 2n + 1 + \frac{1}{n}$ y los elementos con n impar son $-n + \frac{1}{n} + n + 1 = 1 + \frac{1}{n}$. Los primeros pueden ser arbitrariamente grandes tomando n grande entonces $\mathcal{A}$ no está acotado superiormente. Por otro lado, en ambos casos los elementos son claramente mayores que 1, entonces $\mathcal{A}$ está acotado inferiormente y 1 es una cota inferior. De hecho es el ínfimo porque para cualquier otro número $c > 1$ la desigualdad $1 + \frac{1}{n} > c$ no se cumpliría para n par suficientemente grande.