Problemas tipo examen

La división en temas no es exhaustiva. Las referencias (H n- m) indican el problema m de la hoja n y las referencias (A- cd), con A en números romanos indican un examen del mes A del año 20cd. Los enunciados están ligeramente adaptados evitando los formatos tipo test y ajustándolos a una longitud razonable.

1. Números naturales, racionales y reales

1) (H1-1ed) Indicar los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$, b) $|x+1| + |x+3| < 5$.

2) (H1-3ad) Decidir si las siguientes desigualdades son válidas para los valores de x e y que se indican.

a) $|x-y| \le |x| - |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ b) $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$.

3) (H1-4b) Demostrar por inducción $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. para $n \in \mathbb{N}$.

4) (H1-7abd) Indicar si los siguientes conjuntos están acotados inferior y superiormente y en su caso hallar el ínfimo y el supremo.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 < 9\}$, b) $\{x \in \mathbb{R} : x^5 < 9\}$, c) $\{(-1)^n - n^{-1} : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

---

2. Sucesiones y series

5) (H2-1aec) Estudiar si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y en caso afirmativo hallar su límite.

$$a)\ a_n = \frac{3n^4 - 2}{n^4 + 2n^2 + 2}, \quad b)\ a_n = \frac{6^n}{5^n + (-6)^n}, \quad c)\ a_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2.$$

6) (H2-3ab) Consideremos la sucesión $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ con $a_1 = 1$.

a) Probar por inducción que $a_n < 2$.

b) Justificar que a_n es monótona creciente y hallar su límite.

7) (H2-6) Fijado $1 < t \le 4$ consideramos la sucesión recurrente dada por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big)$ con $x_1 = 2$.

a) Probar que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2. *Indicación*: $(a+b)^2 \ge 4ab$ para $a, b \ge 0$.

b) Demostrar que es monótona decreciente.
c) Deducir que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

8) (H2-11abcg) Decidir si las series siguientes son convergentes. Los sumatorios se sobreentienden sobre $n \geq 1$.

$$a)\ \sum \frac{n^2+1}{n2^n}, \quad b)\ \sum \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^n}, \quad c)\ \sum (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}, \quad d)\ \sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2.$$

9) (H2-13abc) Estudiar para qué valores del parámetro α son convergentes las siguientes series:

$$a)\ \sum \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}, \quad b)\ \sum \left(\sqrt{n^{2\alpha}+2}-n^\alpha\right), \quad c)\ \sum \binom{2n+1}{n+1}^\alpha.$$

10) (IX-03) Estudiar la convergencia de la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n}{n(1+1/n)^n}$$

donde $r > 0$ es un parámetro.

11) (IX-04) Estudiar si la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ es monótona, acotada y convergente.

12) (IX-05) Se consideran la sucesión $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$ y la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Estudiar para qué valores del parámetro convergen cada una de ellas.

---

3. Funciones continuas y sus propiedades

13) (H3-1) Encontrar funciones continuas f, g y h con las siguientes propiedades:
a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ es biyectiva.
b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ es inyectiva.
c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que la imagen de $(-1,1)$ por h es $[-1,1]$.

14) (H3-2afed) Decidir si es posible definir las siguientes funciones fuera de los valores que se indican para que sean funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

$$a)\ f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2} \quad \text{si } 0 < x < 1, \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \\ x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$c)\ f(x) = \cos\frac{x^2-1}{|x^2-1|} \quad \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}, \qquad d)\ f(x) = e^{-1/(x-2x^2)} \quad \text{si } 0 < x < 1/2.$$

15) (H3-8) Hallar dos funciones discontinuas tales que su suma sea continua y no constante. Hallar también dos funciones discontinuas tales que su producto sea continuo. ¿Es posible resolver los dos apartados anteriores con el mismo par de funciones?

---

4. La derivada y sus propiedades básicas

16) (H4-1) Usando la definición de derivada comprobar que las funciones $f(x) = 1/(x^2|x|+1)$ y $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ con $g(0) = 0$ verifican $f'(0) = g'(0) = 0$. Comprobar que $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ con $h(0) = 0$ no es derivable en cero.

17) (H4-6) Calcular las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones en el punto que se indica

a) $f(x) = \log(e + \operatorname{sen} x)$ en $x = 0$, *b)* $f(x) = x^{x^2-x+1}$ en $x = 1$,

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ en $x = \pi/6$, *d)* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $x = 2$.

18) (H4-10) ¿Qué se obtiene al derivar tres veces $f(x)g(x)$?

---

5. Teoremas sobre derivación

19) (H5-1) Hallar una fórmula para la derivada segunda de la función inversa.

20) (H5-8abe) Calcular el número exacto de soluciones $x \in \mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones usando los Teoremas de Bolzano y de Rolle:

$$a)\ 2x - 1 = \operatorname{sen} x, \qquad b)\ 2x^3 + ax = a,\ \text{con } a > 0, \qquad c)\ x^5 - 5x - 3 = 0.$$

Indicación: Por el teorema de Rolle si f' no se anula en un intervalo, entonces $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones en dicho intervalo.

21) (H5-10ab) Hallar los polinomios de Taylor de grado 3 en $a = 0$ para las siguientes funciones

$$f(x) = \log(1 + \operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1}{3 + e^x}.$$

22) (H5-13) Hallar las series de Taylor en $a = 0$ para las siguientes funciones, indicando dónde convergen

$$a)\ f(x) = x\log(1+x^2), \qquad b)\ f(x) = x^2\operatorname{sen}(x^3), \qquad c)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

---

6. Aplicaciones de la derivada

23) (H6-1abce) Calcular los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(6x))}{\log(\cos(3x))}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\operatorname{sen}(a/x)$.

24) (H6-6) Queremos construir un cercado rectangular de 20 metros cuadrados pegado a la pared de una granja (luego no es necesario construir uno de los lados). ¿Cuántos metros de cercado debemos construir como mínimo? En ese caso, ¿cuál es la relación entre los lados?

25) (H6-7b) Esbozar la gráfica de la función $f(x) = x\log(x)$. Indicando, si los hubiera, extremos locales, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento e intervalos de concavidad y convexidad.

26) (XII-01) Sea la función $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$. Hallar sus máximos y mínimos locales y globales.

27) (XI-03) Dado $a > 0$, calcular $L = \displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

28) (XII-04) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x}$.

29) (II-05) Decidir si los siguientes límites existen y en su caso hallarlos:

$$L = \lim_{x\to 0} e^{|x|/x} \qquad \text{y} \qquad M = \lim_{x\to 0} \frac{x\arctan(x/2)}{\big(\operatorname{sen}(2x)\big)^2 \cos x}.$$

30) (IX-09) Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$ hallar asíntotas, extremos locales y globales e intervalos de concavidad y convexidad.

---

7. La integral y técnicas de integración

31) (H7-5) Hallar $f'(x)$ si

a) $f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-2}\,dt$, b) $f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$,

c) $f(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$, d) $f(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt$.

32) (H7-9c) Calcular $\int 9x^2 e^{-5x+3}\,dx$.

33) (H7-11ac) Calcular las primitivas de las funciones:

$$a)\ \frac{x}{(x+1)(x-3)} \qquad \text{y} \qquad b)\ \frac{2}{(x-1)(x+3)^2}.$$

34) (H7-11e) Calcular la primitiva de $\dfrac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}$.

35) (H7-13ab) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\ e^{-\sqrt{x}} \qquad \text{y} \qquad b)\ \frac{1}{e^x+4e^{-x}}.$$

36) (IX-02) Hallar $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^3 \cos x\,dx$.

37) (IX-03) Calcular el límite $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x te^{t^2}\,dt}$.

38) (IX-05) Sea la función $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\,dt$. Hallar $f(1)$ y $\left(f^{-1}\right)'(\pi/4)$.

---

8. Aplicaciones de la integral

39) (H8-3b) Hallar el área limitada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{2}{4x^2+1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 2|x|.$$

40) (H8-4) Dada $f(x) = x^2 - 2x + 7$ consideramos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x=0$ y $x=2$ y la gráfica de f. Hallar el área de T.

41) (H8-5) Hallar el área limitada entre la curva definida por $y^2 = 3x$ y la recta $2y-x+24 = 0$.

42) (H8-8) Deducir usando integrales que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que el volumen de un cono recto de altura h y radio de la base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

43) (H8-18) Hallar el área de la región plana definida por las inecuaciones:

$$2y - x^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 2x + y^2 \leq 0\,,$$

y el volumen del cuerpo engendrado por dicha region al girar alrededor del eje X.

44) (IX-02) Hallar el área comprendida por las curvas $y = x/(1+x^2)$ e $y = \frac{1}{2}|x|$.

Soluciones numéricas

1) *a)* $x \in (-2,1) \cup (3,\infty)$. *b)* $x \in (-9/2, 1/2)$.

2) *a)* Falsa, por ejemplo $x = 1$, $y = 2$. *b)* Verdadera.

3) No admite una solución numérica. Se emplea $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

4) a) Acotado con $\text{ínf} = -\sqrt{3}$, $\sup = \sqrt{3}$.
b) Acotado superiormente (pero no inferiormente) con $\sup = \sqrt[5]{9}$.
c) Acotado con $\text{ínf} = -2$, $\sup = 1$.

---

5) a) Converge a 3
b) No converge.
c) Converge a $1/2$.

6) No admite una solución numérica.
a) Se emplea $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$.
b) Se emplea $a_n \le \sqrt{2a_n} \Leftrightarrow a_n \le 2$. El límite es 2.

7) No admite una solución numérica.
a) Se prueba que si $\sqrt{t} \le x_n \le 2$ entonces $\sqrt{t} \le x_{n+1} \le 2$.
b) Se comprueba que $\frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big) \le x_n$ es cierto porque $\sqrt{t} \le x_n$.
c) $\text{lím}\, x_n = \sqrt{t}$ se obtiene tomando límites en la relación de recurrencia.

8) *a)*, *b)* y *c)* convergen; *d)* no converge.

9) *a)* para $\alpha > 0$, *b)* para $\alpha > 1$ y *c)* para $\alpha < 0$.

10) Converge para $r \le 1$.

11) Es monótona creciente, está acotada superiormente por $(1+\sqrt{5})/2$ e inferiormente por 1 y es convergente con límite $(1+\sqrt{5})/2$.

12) La sucesión converge si y sólo si $\alpha \ge -1/2$ y la serie converge si y sólo si $\alpha > 1/2$

---

13) Por ejemplo $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan x$, $g(x) = \big(1 + f(x)\big)/2$ y $h(x) = \text{sen}(\pi x)$.

14) a) No es posible porque $\text{lím}_{x\to 0} f(x) = \infty$.
b) No es posible porque $\text{lím}_{x\to 2^+} = 3 \ne \text{lím}_{x\to 2^-} = 4$.
c) Sí es posible definiendo $f(1) = f(-1) = \cos 1$.
d) Sí es posible definiendo $f(x) = 0$ en $(-\infty, 0] \cup [1/2, \infty)$.

15) Por ejemplo

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{si } x\geq 0\\ -1+x & \text{si } x\leq 0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases} -1+x & \text{si } x\geq 0\\ 1+x & \text{si } x\leq 0\end{cases}.$$

---

16) Las derivadas son $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$ y $g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=0$. Por otro lado $\nexists \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{h}$.

17) a) $y=e^{-1}x+1$.
b) $y=x+1$.
c) $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.
d) $y=-\frac{7}{3}x+\frac{79}{15}$.

18) $f'''g+3f''g'+3f'g''+fg'''$.

---

19) $\left(f^{-1}\right)''(x)=\dfrac{-f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left(f'\left(f^{-1}(x)\right)\right)^2 f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

20) *a*) una; *b*) una; *c*) tres.

21) Para f, $T_{3,0}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$. Para g, $T_{3,0}(x)=\frac{1}{4}-\frac{x}{16}-\frac{x^2}{64}+\frac{x^3}{768}$.

22) *a*) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n}$ que converge en $-1\leq x\leq 1$.
b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{6n+5}}{(2n+1)!}$ que converge para todo $x\in\mathbb{R}$.
c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ que converge para todo $x\in\mathbb{R}$.

---

23) a) $\pi^2/2$; b) 4; c) 1; d) a.

24) Los lados perpendiculares a la pared miden $\sqrt{10}$ y el otro $2\sqrt{10}$.

25) El dominio de esta función es $(0,\infty)$. Decrece en $(0,e^{-1})$ y crece en (e^{-1},∞) alcanzando un mínimo global en $x=e^{-1}$. Es convexa en todo su dominio por tanto no hay puntos de inflexión.

26) El mínimo global es 0 y se alcanza en $x=1$ y $x=3$. El máximo global es 3 y se alcanza en los extremos $x=0$ y $x=4$. Se alcanza un máximo local en $x=2$.

27) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

28) Es decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(-1,0)$, Es creciente en $(0,\infty)$.

29) L no existe y $M=\frac{1}{8}$.

30) Tiene una asíntota (horizontal) $y = 0$. Se alcanza un máximo global en $x = 1$ y $x = -1$ y un mínimo global en $x = 0$. No se alcanzan otros extremos. Es convexa en $(-\infty, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$ y es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(0, \sqrt{3})$.

---

31) *a)* $(1+x^2)^{-2}$; *b)* $(1+x^4)^{-3} \cdot 2x$; *c)* $(1+x^4)^{-3} \cdot 2x - (1+x^6)^{-3} \cdot 3x^2$; *d)* $-e^{7x}/(1+e^{4x})$.

32) $-\frac{9}{125}\big(25x^2 + 10x + 2\big)e^{-5x+3}$

33) *a)* $\frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{3}{4}\log|x-3| + K$.
b) $\frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+3| + \frac{1}{2}(x+3)^{-1} + K$.

34) $\log|x-1| - 5\log|x+1| + 2\log(x^2+2x+2) + 3\arctan(x+1) + K$.

35) *a)* $2 - 4e^{-1}$; *b)* $\frac{1}{2}\arctan\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

36) $\frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6$.

37) $L = 2$.

38) $f(1) = \frac{\pi}{4}$, $\big(f^{-1}\big)'(\pi/4) = 1$.

---

39) $\frac{\pi-1}{2}$.

40) $\frac{2}{3}$.

41) 324.

42) No admite una solución numérica. Se calculan las integrales $A = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ y $V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$.

43) $A = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$ y $V = \frac{10\pi}{3}$.

44) $A = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}$.
